Polytech Lyon, MAM3A, 2021-2022

Analyse Numérique (AN)

Partiel 3 - janvier 2022

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

Pour toute fonction continue $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ on considère la formule simple de quadrature

$$(1) \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \sim \alpha f\left(-\frac{1}{3}\right) + \beta f(0) + \gamma f\left(\frac{1}{3}\right)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

a) Trouver α, β et γ tels que la formule (1) soit d'ordre au moins égal à 2.

b) Quel est l'ordre de la formule (1) avec α, β et γ trouvés au point **a)** ?

Exercice 2.

On se donne deux fonctions $g, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec g de classe C^3 et φ de classe C^2. Soit $r \in \mathbb{R}$ une racine de la fonction g (donc $g(r) = 0$) et supposons aussi que r est un point fixe de ϕ (donc $\phi(r) = r$). On suppose en plus que $g'(r) \neq 0$. Nous considérons la généralisation suivante de la méthode de Newton pour construire par récurrence une suite (x_n) qui approche r :

$$(2) \qquad \begin{cases} x_{n+1} & = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(\varphi(x_n))}, \quad n \in \mathbb{N} \\ \\ x_0 & \text{donné} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On définit l'ensemble

$$D = \{x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) \neq 0\} \qquad (\text{donc } r \in D)$$

et pour tout $y > 0$ on note $B_y =]r - y, r + y[$.

a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $B_\alpha \subset D$.

b) Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que si $x \in B_\beta$ alors $\varphi(x) \in B_\alpha$.

c) On introduit la fonction $f : B_\beta \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(\varphi(x))}.$$

Montrer que f est bien définie.

Montrer que r est un point fixe de f.

d) Calculer $f'(r)$ et en déduire qu'il existe γ avec $0 < \gamma < \beta$ et tel que si $x_0 \in B_\gamma$ alors la suite (x_n) construite en (2) est bien définie, avec $x_n \in B_\gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; montrer en plus que $x_n \to r$ pour $n \to +\infty$. Que peut-on dire de l'ordre de cette convergence ?

Exercice 3.

On considère l'équation différentielle scalaire : trouver $y = y(t)$ une fonction de classe C^1

telle que

$$y' = y^2 - 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

a) Trouver toutes les solution de (3) avec leurs intervalles d'existence.
(*Indication : la fonction* $x \mapsto x^2 - 1$ *s'écrit sous la forme* $\alpha(t)\beta(x)$ *avec* $\alpha(t) = 1$ *et* $\beta(x) = x^2 - 1$).
b) Trouver la solution y de (3) satisfaisant en plus la condition initiale

$$y(0) = 0 \tag{4}$$

(*problème de Cauchy*). Cette solution est-elle globale ?

Exercice 4.
On considère $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 qui en plus est lipschitzienne, c'est à dire, il existe une constante $L \geq 0$ telle que

$$|F(u) - F(v)| \leq L\,|u - v|, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}.$$

Considérons le problème de Cauchy : trouver $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$\begin{cases} y' & = F(y), \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = y^0 \end{cases} \tag{5}$$

avec $y^0 \in \mathbb{R}$ donné.
a) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution du problème (5).
Pour la suite du problème on se donne $T > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ *avec* $N \geq T$, *on pose* $h = \frac{T}{N}$ *(donc* $0 < h \leq 1$*) et aussi*

$$t_n = nh, \quad n \in [[0, N]].$$

On introduit la fonction $g : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *donnée par*

$$g(x, h) = aF(x) + bF(x + hF(x)), \quad \forall\, (x, h) \in \mathbb{R} \times [0,1]$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. *On propose le schéma numérique suivant à un pas pour approcher la solution* y *de* (5) sur l'intervalle $[0, T]$ (y_n va désigner une approximation de $y(t_n)$) :

$$\begin{cases} y_{n+1} & = y_n + hg(y_n, h), \quad n \in [[0, N-1]] \\ y_0 & = y^0. \end{cases} \tag{6}$$

b) Montrer la stabilité du schéma (6) pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.
c) Donner une condition suffisante sur a, b tels que le schéma (6) pour approcher (5) soit consistant.
d) Montrer que pour toute solution y de (5) il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$|g(y(t), h) - (a + b)F(y(t)) - bhF'(y(t))F(y(t))| \leq Ch^2, \quad \forall\, t \in [0, T],\ \forall\, h \in [0, 1].$$

e) Trouver un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que le schéma (6) pour approcher (5) soit consistant à l'ordre au moins 2.