Corrigé Partiel 1 AN 2022-2023

Exo 1

a) $\dfrac{U_{N+1}-U_N}{h} = \beta$ donc

ce qui s'écrit : $U_{N+1} - U_N = \beta h$

~~$U_N - U_{N+1} - \beta h$~~ $U_{N+1} = U_N + \beta h$.

b) L'approximation de (1) en x_i sera

$$-\frac{\gamma_{i+1/2}\dfrac{(U_{i+1}-U_i)}{h} - \gamma_{i-1/2}\dfrac{(U_i - U_{i-1})}{h}}{h} = f(x_i)$$

ce qui s'écrit :

$$(1)' \quad -\gamma_{i-1/2} U_{i-1} + (\gamma_{i-1/2} + \gamma_{i+1/2}) U_i - \gamma_{i+1/2} U_{i+1} = h^2 f(x_i) \quad i = 1, 2 \dots N.$$

Nous posons $U_0 = \alpha$ et $U_{N+1} = U_N + \beta h$ (de a))

ce qui donne

$$(2)' \quad (\gamma_{1/2} + \gamma_{3/2}) U_1 - \gamma_{3/2} U_2 = h^2 f(x_1) + \gamma_{1/2}\alpha$$

$$(3)' \quad -\gamma_{i-1/2} U_{i-1} + (\gamma_{i-1/2} + \gamma_{i+1/2}) U_i - \gamma_{i+1/2} U_{i+1} = h^2 f(x_i) \quad i = 2 \dots N-1$$

En prenant $i = N$ en $(1)'$ on obtient

$$-\gamma_{N-1/2} U_{N-1} + (\gamma_{N-1/2} + \gamma_{N+1/2}) U_N - \gamma_{N+1/2}(U_N + \beta h) = h^2 f(x_N)$$

ce qui donne

$$(4)' \quad -\gamma_{N-1/2} U_{N-1} + \gamma_{N-1/2} U_N = \gamma_{N+1/2}\beta h + h^2 f(x_N)$$

Donc le système en $U_1 \dots U_N$ est $(2)'$, $(3)'$ et $(4)'$.

On pose
$$b_1 = h^2 f(x_1) + \gamma_{1/2}\alpha$$
$$b_i = h^2 f(x_i), \quad i = 2 \dots N-1$$
$$b_N = \gamma_{N+1/2}\beta h + h^2 f(x_N)$$
et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$

On pose $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$

Alors notre système algébrique linéaire s'écrit

$$AU = b$$

avec $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_{1/2}+\gamma_{3/2} & -\gamma_{3/2} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ -\gamma_{3/2} & \gamma_{3/2}+\gamma_{5/2} & -\gamma_{5/2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma_{N-3/2} & \gamma_{N-3/2}+\gamma_{N-1/2} & -\gamma_{N-1/2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\gamma_{N-1/2} & \gamma_{N-1/2} \end{pmatrix}$$

On peut écrire :

$$A_{ij} = \begin{cases} \gamma_{i-1/2}+\gamma_{i+1/2} & \text{si } i=j \in [\![1, N-1]\!] \\ \gamma_{i-1/2} & \text{si } i=j=N \\ -\gamma_{i+1/2} & \text{si } j=i+1 \\ -\gamma_{i-1/2} & \text{si } j=i-1 \\ 0 & \text{si } |j-i| \geq 2 \end{cases}$$

c) Montrons que A est symétrique

- si $|i-j| \geq 2$ alors $A_{ij} = A_{ji} = 0$ donc OK !
- si $j=i+1$ alors $A_{ij} = -\gamma_{i+1/2}$
  $A_{ji} = A_{i+1,i} = -\gamma_{i+1-1/2} = -\gamma_{i+1/2}$ donc OK !
- si $j=i-1$ alors $A_{ij} = -\gamma_{i-1/2}$
  $A_{j,i} = A_{i-1,i} = -\gamma_{i-1/2}$

Alors A est symétrique.
Montrons que A est SDP.
$\forall x \in \mathbb{R}^N$ on a

$$\langle Ax, x\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_i x_j = (\gamma_{1/2}+\gamma_{3/2})x_1^2 - 2\gamma_{3/2} x_1 x_2 + (\gamma_{3/2}+\gamma_{5/2})x_2^2 - 2\gamma_{5/2} x_2 x_3 + \cdots (\gamma_{N-3/2}+\gamma_{N-1/2})x_{N-1}^2 - 2\gamma_{N-1/2} x_{N-1}x_N + \gamma_{N-1}x_N^2 = \gamma_{1/2}x_1^2 + \gamma_{3/2}(x_1-x_2)^2 + \gamma_{5/2}(x_2-x_3)^2 + \cdots \gamma_{N-3/2}(x_{N-2}-x_{N-1})^2 + \gamma_{N-1/2}(x_{N-1}-x_N)^2$$

Il est évident que $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$, donc A est positive.

$$\langle Ax, x\rangle = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma_{1/2} x_1^2 = 0 \\ \gamma_{3/2}(x_1-x_2)^2 = 0 \\ \vdots \\ \gamma_{N-1/2}(x_{N-1}-x_N)^2 = 0 \end{cases}$$

Comme $\gamma_{i-1/2} > 0 \quad \forall i$ on obtient

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_{N-1} - x_N = 0 \end{cases} \quad \text{ce qui donne} \quad x = 0.$$

Donc A est <u>SDP</u>.

Exo 2.

a1) On peut ecrire A par blocs $A = (b \ b \cdots b)$

Alors $Ax = (b \cdots b)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 b + x_2 b + \cdots x_m b$
$= \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) b$

a2) Nous avons
$\|Ax\|_p = \|\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) b\|_p = \left|\sum_{i=1}^{N} x_i\right| \|b\|_p$

On pose $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{1} = \langle x, y \rangle$

Par inegalite de Holder en $\mathbb{C}^n$ on a

$\left|\sum_{i=1}^{N} x_i\right| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$

Mais $\|y\|_q = (1^q + 1^q + \cdots 1^q)^{1/q} = n^{1/q}$.

donc

$\|Ax\|_p \leq n^{1/q} \|x\|_p \|b\|_p = n^{1/q} \|b\|_p$ car $\|x\|_p = 1$.

a3) Nous avons $\forall x \in \mathbb{C}^n$ avec $\|x\|_p = 1$

$\|Ax\|_p \leq n^{1/q} \|b\|_p$

En passant en "sup" pour $x \in \mathbb{C}^n$ avec $\|x_p\| = 1$ on obtient

$\|A\|_p \leq n^{1/q} \|b\|_p$.

b1) ~~On a vu en a2) que $\|y\|_q = n^{1/q}$~~ On peut montrer comme en a2) que

~~Alors $\|A$~~

$\|y\|_p = n^{1/p}$. Alors $\|n^{-1/p} y\|_p = n^{-1/p} \|y\|_p = n^{-1/p} n^{1/p} = 1$

b2) ~~Alors~~ $Az = n^{-1/p} AY = n^{-1/p} \begin{pmatrix} b & b & \dots & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$= n^{-1/p} n b = n^{1-1/p} b$

donc

$Az = n^{1-1/p} b$

b3) $\|Az\|_p = \|n^{1-1/p} b\|_p = n^{1-1/p} \|b\|_p$

Mais $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ donc

$\|Az\|_p = n^{1/q} \|b\|_p$ avec $z \in \mathbb{C}^n$, $\|z\|_p = 1$

On en deduit

$\sup_{\substack{z \in \mathbb{C}^n \\ \|z\|_p = 1}} \|Az\|_p \geq n^{1/q} \|b\|_p$ donc

$\|A\|_p \geq n^{1/q} \|b\|_p$

Exo 3.

a) $A^T = -A$ donc $\underset{\substack{\| \\ A_{ii}}}{(A^T)_{ii}} = (-A)_{ii} = -A_{ii}$ $\forall i = 1 \dots n$

donc $A_{ii} = -A_{ii}$ $\forall i = 1 \dots n$

ce qui donne $A_{ii} = 0$ $\forall i = 1 \dots n$

b) Montrons que $P^T A P$ est antisymetrique

$(P^T A P)^T = P^T A^T (P^T)^T = P^T A^T P = P^T(-A)P$ (car A antisymetrique)

$= -P^T A P$

Donc $P^T A P$ est antisymetrique

Alors de a) $P^T A P$ est à diagonale nulle.

c1) choisir $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$

$B = \frac{1}{2}(A + A^T)$

$B + C = \frac{1}{2}(A - A^T + A + A^T) = \frac{1}{2} 2A = A$

$$C^T = \left(\frac{1}{2}(A-A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T-A) = -\frac{1}{2}(A-A^T) = -C$$

donc C est antisymetrique

$$B^T = \left(\frac{1}{2}(A+A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T+A) = B$$

donc B est symetrique

c2) Nous avons

B symetrique
C antisymetrique
$Q \in O_n(\mathbb{R})$: $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
D diagonale

(5)' $A = B + C$

donc

$A = QDQ^T + C$

On multiplie par Q^T à gauche et ~~p~~ par Q à droite

(6)' $Q^TAQ = \underbrace{Q^TQ}_{=I_n}D\underbrace{Q^TQ}_{=I_n} + Q^TCQ = D + Q^TCQ$

Par hypothese Q^TAQ est à diagonale nulle
Comme C est antisymetrique alors Q^TCQ est à diagonale nulle (de a))
Alors de (6)' on deduit que D est a diagonale nulle.
Mais comme D est diagonale alors $D = 0$
Comme $B = QDQ^T$ alors $B = 0$
De (5)' on deduit
$A = C$ donc A est antisymetrique.