Corrigé Partiel 2 AN

Exo 1.

a) $\det(A) = 2\det\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix} + b\det\begin{pmatrix} b & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (dev. ~~colonne~~ ligne 3)

$= 2(1-b^2) + b(-b) = 2 - 3b^2$

$\det(A) = 0 \iff b = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Donc A est inversible si et seulement si $b \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

b) $A = D - E - F$

avec $D = \mathrm{diag}(1, 1, 2)$ $\quad E + F = \begin{pmatrix} 0 & -b & -b \\ -b & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On ~~sait~~ a $J = D^{-1}(E+F)$ Alors

Mais $D^{-1} = \mathrm{diag}(1, 1, \frac{1}{2})$

$J = \mathrm{diag}(1, 1, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -b & -b \\ -b & 0 & 0 \\ -b/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$P_\lambda(J) = \det({}^0J - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -b & -b \\ -b & -\lambda & 0 \\ -b/2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =$

(on developpe sur la colonne 3) $= -\lambda \det\begin{pmatrix} -\lambda & -b \\ -b & -\lambda \end{pmatrix} -$

$-b\det\begin{pmatrix} -b & -\lambda \\ -b/2 & 0 \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - b^2) - b\left(-\frac{b}{2}\lambda\right)$

$= -\lambda(\lambda^2 - b^2) + \frac{b^2}{2}\lambda = \lambda\left(-\lambda^2 + b^2 + \frac{b^2}{2}\right) = \lambda\left(-\lambda^2 + \frac{3b^2}{2}\right)$

c) On cherche $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $P_J(\lambda) = 0$.

On a : $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm b\sqrt{\frac{3}{2}}$

donc $Sp(J) = \left\{0, b\sqrt{\frac{3}{2}}, -b\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$

Alors $\rho(J) = \max\left\{0, |b|\sqrt{\frac{3}{2}}\right\} = |b|\sqrt{\frac{3}{2}}$

On cherche $b \in \mathbb{R}$ tels que $\rho(J) < 1$

donc $|b|\sqrt{\frac{3}{2}} < 1 \iff |b| < \sqrt{\frac{2}{3}}$

Donc méthode de Jacobi convergente $\iff |b| < \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Exercice 2.

a) Soit P le polynome d'interpolation demandé.

$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$

On a

$f(x_0) = e^{-2}$

$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = e^{-4} - e^{-2}$

$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = e^{-6} - e^{-4}$

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{2}(e^{-6} - e^{-4} - e^{-4} + e^{-2})$

$= \frac{1}{2}(e^{-6} - 2e^{-4} + e^{-2})$

Donc

$P(x) = e^{-2} + (e^{-4} - e^{-2})(x - 1) + \frac{1}{2}(e^{-6} - 2e^{-4} + e^{-2})(x-1)(x-2)$ $\forall x \in [1, 3]$

b)

b1) $\cancel{f^{(n+1)}(x) =}$ $f'(x) = -2e^{-2x}$

$f''(x) = (-2)^2 e^{-2x}$

$\vdots$

$f^{(n+1)}(x) = (-2)^{n+1} e^{-2x}$ $\forall x \in [1, 3]$

Alors $|f^{(n+1)}(x)| = 2^{n+1} e^{-2x}$

Comme la fonction $x \to e^{-2x}$ est decroissante sur $[1, 3]$

alors $e^{-2x} \leq e^{-2\cdot 1} = e^{-2}$ $\forall x \in [1, 3]$.

Donc $|f^{(n+1)}(x)| \leq \frac{2^{n+1}}{e^2}$ $\forall x \in [1, 3]$

b2) Comme $x_j \in [1, 3]$ et $x \in [1, 3]$ on a :

$\begin{cases} 1 \leq x_j \leq 3 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} -3 \leq -x_j \leq -1 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

En faisant la somme :

$-2 \leq x - x_j \leq 2$ donc

$|x_j - x| \leq 2$ $\forall j = 0 \ldots n$, $\forall x \in [1,3]$

Alors

$|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)| \leq 2^{n+1}$ $\forall x \in [1,3]$

b3) En utilisant un résultat du cours on a $\forall x \in [1,3]$

$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Theta_n(x)|$

(car $f \in C^{\infty}([1,3])$)

avec

$M_{n+1} = \max_{1 \leq x \leq 3} |f^{(n+1)}(x)|$ et $\Theta_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$

On a donc ici

$M_{n+1} \leq \cancel{e^{n+1}} \frac{2^{n+1}}{e^2}$

$|\Theta_n(x)| \leq 2^{n+1}$

On a alors

$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{2^{n+1}}{e^2} \cdot 2^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{e^2} 4^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}$

$\forall x \in [1,3]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Alors en passant au "sup" : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$\sup_{x \in [1,3]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{e^2} \frac{4^{n+1}}{(n+1)!}$

Mais on a : $\cancel{\frac{4^{n+1}}{n}}$ $\frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

car $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} = e^4 < \infty$

(donc $\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}$ c'est le terme général d'une série convergente)

On a alors $\sup_{x \in [1,3]} |f(x) - P_n(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Exercice 3

Partie I. $A = LU$ s'écrit pour tout $p \in [1, n]$

$$\begin{pmatrix} A_p & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_p & 0 \\ \square & \square \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_p & \square \\ 0 & \square \end{pmatrix}$$

où "$\square$" représente un bloc de taille ~~..~~ correspondante

L_p c'est la ~~..~~ sous-matrice principale de L obtenue avec les p premières lignes et colonnes de L

et analogue pour U_p ; 0 ~~est~~ désigne un bloc 0.

Par identification on a

$$A_p = L_p U_p + 0 \cdot 0 = L_p U_p$$

Clairement L_p et U_p sont inversibles car L et U le sont

Alors A_p est inversible

Partie II

II a. $A_1 = (A_{11}) = \underbrace{(1)}_{=L} \cdot \underbrace{(A_{11})}_{=U}$

A_1 est inversible veut dire $A_{11} \neq 0$. Alors ~~A~~ U est inversible

II b. La sous-matrice A_{p+1} s'écrit par blocs sous la forme

$$A_{p+1} = \begin{pmatrix} A_p & E_p \\ F_p & A_{p+1,p+1} \end{pmatrix}$$ avec

$E_p \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $F_p \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$, $A_{p+1,p+1} \in \mathbb{K}$

Nous avons $A_p = L_p U_p$.

On cherche à écrire alors A_{p+1} sous la forme ~~blocs~~

$$A_{p+1} = \begin{pmatrix} L_p & 0 \\ b_p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_p & c_p \\ 0 & d_p \end{pmatrix}$$ avec b_p, c_p, d_p à trouver

donc

Nous avons $A_{p+1} = \begin{pmatrix} L_p U_p + 0 & L_p c_p + 0 \\ b_p U_p + 0 & b_p c_p + 1 d_p \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} A_p & E_p \\ F_p & A_{p+1,p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_p U_p & L_p c_p \\ b_p U_p & b_p c_p + d_p \end{pmatrix}$$

Par identification on devrait avoir

(1)' $A_p = L_p U_p \longrightarrow$ déjà vraie

(2)' $E_p = L_p c_p$

(3)' $F_p = b_p U_p$

(4)' $A_{p+1,p+1} = b_p c_p + d_p$

Mais (2)' est vraie si on choisit $c_p = L_p^{-1} E_p$
(possible car L_p inversible)

(3)' est vraie si on choisit $b_p = F_p U_p^{-1}$
(U_p est inversible)

(4)' est vraie avec $d_p = A_{p+1,p+1} - b_p c_p$

Nous avons donc l'égalité demandée
D'autre part la matrice $\begin{pmatrix} L_p & 0 \\ b_p & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice du type L dans $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{K})$
et la matrice $\begin{pmatrix} U_p & c_p \\ 0 & d_p \end{pmatrix}$ est une matrice du type U dans $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{K})$

~~Alors la partie "hérédité" est vraie, donc on a le résultat souhaité.~~

Comme A_{p+1} est inversible alors la matrice $\begin{pmatrix} U_p & c_p \\ 0 & d_p \end{pmatrix}$ est inversible, donc $d_p \neq 0$ ~~(car~~
(car la matrice est triangulaire supérieure)

donc $\begin{pmatrix} U_p & c_p \\ 0 & d_p \end{pmatrix}$ est du type U.

Alors la partie "hérédité" est vraie, ce qui donne le résultat souhaité.