Corrigé Partiel 3 AN 2022-2023

Exo 1.

a) On introduit la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = x(1+e^x) - e^x$

$f \in C^1$ et on a

$f'(x) = 1 + e^x + xe^x - e^x = 1 + xe^x$

Pour $x \in [0,1]$ on a $xe^x \geq 0$ donc $f'(x) > 0$

$f(0) = -1$

$f(1) = 1$

Tableau de variation :

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-1 \nearrow$	1

Il existe alors une solution unique sur $[0,1]$ notée r de $f(x)=0$; $0 < r < 1$.

b) $x(1+e^x) = e^x \iff x = \frac{e^x}{1+e^x}$ (car $1+e^x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$)

donc $x = g(x)$,

c) Il faut montrer $g([0,1]) \subset [0,1]$ $\forall x \in [0,1]$

c'est à dire $0 \leq g(x) \leq 1$

Nous avons $e^x > 0$ et $1+e^x > 0$ donc $g(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$e^x < 1+e^x$ donc $\frac{e^x}{1+e^x} < 1$ (car $1+e^x > 0$)

On a même $0 < g(x) < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) $g'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2}$

Alors $g'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. On va ~~montrer~~ $g'(x)$ pour $x \in [0,1]$

On a $g'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \frac{1}{1+e^x}$.

Mais $\frac{e^x}{1+e^x}$ $0 < \frac{e^x}{1+e^x} < 1$ donc

$g'(x) < \frac{1}{1+e^x}$. Ensuite ~~$e^x > 1$ car x~~ si $x \in$

$e^x \geq 1$ car $x \geq 0$ donc

$g'(x) \leq \frac{1}{2}$, $\forall x \in [0,1]$

En plus $g'(x) > 0$ donc

$|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ $\forall x \in [0,1]$

D'autre part $\forall x, y \in [0,1]$, $\exists z \in [0,1]$ tel que

$g(x) - g(y) = g'(z)(x-y)$, ce qui donne

$|g(x) - g(y)| = |g'(z)||x-y| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

ceci $\forall x, y \in [0,1]$

Alors g est strictement contractante sur $[0,1]$

c) On applique le théorème de Banach-Picard sur $E = [0,1]$ (fermé)

Alors il existe ~~$r \in [0,1]$ point fixe de~~ un unique $r' \in [0,1]$ point fixe de g. Par unicité $r' = r$ (car r est point fixe de g de b))

En plus la suite x_n est tel que $x_n \xrightarrow{n \to \infty} r$.

Exercice 2.

a) C'est une equation à variables separeé

(2) $y' = a(t)\, b(y)$

avec $a: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad a(t) = 6t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$b: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad b(x) = e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Resoudre $b(y) = 0$? $\quad e^{2y} = 0$ ne donne aucune solution

On divise alors (2) par e^{2y}

$\frac{y'}{e^{2y}} = 6t$ donc

$y' e^{-2y} = 6t$ c'est à dire

$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2} e^{-2y}\right) = \frac{d}{dt}(3t^2)$ ce qui donne

$-\frac{1}{2} e^{-2y} = 3t^2 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$, constante donc

(1)' $e^{-2y} = -2\,(3t^2+c)$ tel que $3t^2+c < 0$

Il faut trouver l'intervalle en t

Cas 1. $c \geq 0$

$3t^2+c<0$ est impossible

Cas 2. $c<0$ $\iff t^2 < -\frac{c}{3} \iff t \in \left]-\sqrt{-\frac{c}{3}}, \sqrt{-\frac{c}{3}}\right[$

$3t^2+c<0$

~~Conclus~~ On isole y de (1)' donc

$-2y = \ln(-2(3t^2+c))$ donc $\forall t \in J$

(2)' $y(t) = -\frac{1}{2} \ln(-2(3t^2+c))$, ~~$\forall t\in J$ avec $J = \left]\sqrt{-\frac{c}{3}}, \sqrt{-\frac{c}{3}}\right[$ avec $c<0$~~

Ici l'ensemble J de définition de y est

$J = \emptyset$ si $c \geq 0$

$J = \left]-\sqrt{-\frac{c}{3}}, \sqrt{-\frac{c}{3}}\right[$ si $c<0$

b) On cherche $c<0$ tel que $y(-2)=1$

avec y donné par (2)'

Alors on arrive à l'équation en c : ce qui donne

$-\frac{1}{2}\ln(-2(3\cdot 4+c)) = 1$ donc

$\ln(-2(12+c)) = -2 \iff 12+c = -\frac{1}{2}e^{-2}$

$-2(12+c) = e^{-2}$; On a $-\frac{c}{3} = 4 + \frac{1}{6}e^{-2}$

$c = -12 - \frac{1}{2}e^{-2}$

Alors la solution de (2)-(3) est donnée par

$y(t) = -\frac{1}{2}\ln\left(-2\left(3t^2 - 12 - \frac{1}{2}e^{-2}\right)\right)$, $\forall t \in J$

avec

$J = \left]-\sqrt{4+\frac{1}{6}e^{-2}}, \sqrt{4+\frac{1}{6}e^{-2}}\right[$

(remarque $-2 \in J$)

Exo 3.

a1) Comme la formule de Simpson est d'ordre 3 et $P_{3,Y}$ est un polynome d'ordre ≤ 0 alors

$$\int_\alpha^\beta P_{3,Y}(t)\,dt = \frac{\beta-\alpha}{6}\left[P_{3,Y}(\alpha)+4\,P_{3,Y}(\gamma)+P_{3,Y}(\beta)\right]$$

Mais $P_{3,Y}(\alpha)=g(\alpha)$; $P_{3,Y}(\gamma)=g(\gamma)$ $P_{3,Y}(\beta)=g(\beta)$

Alors

$$\int_\alpha^\beta P_{3,Y}(t)\,dt = \frac{\delta}{6}\left[g(\alpha)+4\,g(\gamma)+g(\beta)\right] = I_2(g)$$

a2) On a

$$e_2(g)=\int_\alpha^\beta g(t)\,dt - I_2(g) \overset{\text{de a1)}}{=} \int_\alpha^\beta g(t)\,dt - \int_\alpha^\beta P_{3,Y}(t)\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[g(t)-P_{3,Y}(t)\right]dt \quad . \quad \text{Alors}$$

$$|e_2(g)| \leq \int_\alpha^\beta |g(t)-P_{3,Y}(t)|\,dt$$

Du théorème du cours qui donne une estimation de l'erreur d'interpolation on a

$$|g(t)-P_{3,Y}(t)| \leq \frac{1}{4!}\max_{t\in[\alpha,\beta]}|g^{(4)}(t)|\cdot|\theta_Y(t)|$$

Si on integre sur $[\alpha,\beta]$ on obtient le resultat (car $4!=24$)

a3) Observer que tous les termes en (5) sont independants de Y, sauf $\int_a^\beta |\theta_Y(t)|\,dt$ ce qui donn

On passe à la limite $Y\to\gamma$ en (5)

$$|e_2(g)| \leq \frac{1}{24}\max_{t\in[\alpha,\beta]}|g^{(4)}(t)|\lim_{Y\to\gamma}\int_\alpha^\beta|\theta_Y(t)|\,dt$$

Par le resultat de continuité admis onc

$$\lim_{Y\to\gamma}\int_\alpha^\beta|\theta_Y(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta|\theta_\gamma(t)|\,dt$$

donc

(3)' $|e_2(g)| \le \frac{1}{24} \max_{t\in[\alpha,\beta]} |g^{(4)}(t)| \int_\alpha^\beta |\theta_\gamma(t)|\,dt$

Il reste à calculer $\int_\alpha^\beta |\theta_\gamma(t)|\,dt$

On a si $t\in[\alpha,\beta]$

$\theta_\gamma(t) = (t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)^2 \le 0$ car $t-\alpha \ge 0$, $t-\beta \le 0$, $(t-\gamma)^2 \ge 0$

Alors

$|\theta_\gamma(t)| = (t-\alpha)(\beta-t)(t-\gamma)^2$ si $t\in[\alpha,\beta]$

On a alors

$$\int_\alpha^\beta |\theta_\gamma(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta (t-\alpha)(\beta-t)(t-\gamma)^2\,dt$$

On fait le changement des variables $u = t-\gamma \Leftrightarrow t = u+\gamma$

$$\int_\alpha^\beta (t-\alpha)(\beta-t)(t-\gamma)^2\,dt = \int_{\alpha-\gamma}^{\beta-\gamma} (u+\gamma-\alpha)(\beta-\gamma-u)\,u^2\,dt$$

Observer : $\alpha-\gamma = -\frac{\delta}{2}$; $\beta-\gamma = \frac{\delta}{2}$

Alors

$$\int_\alpha^\beta |\theta_\gamma(t)|\,dt = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} u^2\left(u+\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{\delta}{2}-u\right)du = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\delta/2} u^2\left(\frac{\delta^2}{4}-u^2\right)du$$

$$= \frac{\delta^2}{4}\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\delta/2} u^2\,du - \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\delta/2} u^4\,du = \frac{\delta^2}{4}\,\frac{2}{3}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 - \frac{2}{5}\left(\frac{\delta}{2}\right)^5$$

$$= \left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{\delta}{2}\right)^5 = \frac{4}{15}\left(\frac{\delta}{2}\right)^5 = \frac{4}{15}\,\frac{\delta^5}{32} = \frac{\delta^5}{120}$$

Donc de (3)'

$$\int_\alpha^\beta |\theta_\gamma(t)|\,dt \le \frac{1}{\underbrace{24\cdot 120}_{=2880}} \max_{t\in[\alpha,\beta]} |g^{(4)}(t)|\cdot\delta^5$$

ce qui donne le résultat de (1)

b1) $I_k(f) = h\int_0^1 g_k(t)\,dt \sim h\,\frac{1}{6}\left[g_k(0)+4g_k\left(\frac{1}{2}\right)+g_k(1)\right]$

$= \frac{h}{6}\left[f(a_{k-1})+4f\left(a_{k-1}+\frac{h}{2}\right)+f(a_k+h)\right]$

Mais $a_{k-1}+\frac{h}{2} = \frac{a_{k-1}+a_k}{2}$ et $a_k+h = a_{k-1}$

ce qui donne le résultat

b2) $I(f) - S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} J_k$

$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx - \frac{h}{6}\left[f(a_{k-1}) + 4 f\left(\frac{a_{k-1}+a_k}{2}\right) + f(a_k) \right] \right\}$

Alors

$|I(f) - S_n(f)| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx - \frac{h}{6}\left[f(a_{k-1}) + 4 f\left(\frac{a_{k-1}+a_k}{2}\right) + f(a_k) \right] \right|$

On utilise (1) avec $\alpha = a_{k-1}$, $\delta = h$

$\beta = a_k$

$g = f$

Ceci donne

$|I(f) - S_n(f)| \leq \sum_{k=1}^{n} \max_{x \in [a_{k-1}, a_k]} |f^{(4)}(x)| \frac{h^5}{2880}$

Mais $\max_{x \in [a_{k-1}, a_k]} |f^{(4)}(x)| \leq \underbrace{\max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|}$ indep de k.

Alors

$|I(f) - S_n(f)| \leq n \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \frac{h^5}{2880}$

Mais $n = \frac{b-a}{h}$

Alors

$|I(f) - S_n(f)| \leq \frac{b-a}{2880} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \, h^4$