Polytech Lyon, MAM3A, 2022-2023

Analyse Numérique (AN)

Partiel 1 - octobre 2022

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert borné dans $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On se donne aussi deux fonction $f, \gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $f \in C(\bar{\Omega})$ et $\gamma \in C^1(\bar{\Omega})$.
On suppose en plus que $\gamma(x) > 0, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}$.
On considère l'q́uation différentielle suivante avec conditions aux limites du type Neuman: trouver $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ satisfaisant

$$-(\gamma u')'(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \Omega \tag{1}$$

$$u(a) = \alpha \tag{2}$$

et

$$u'(b) = \beta. \tag{3}$$

Pour approcher le problème par un système linéaire algébrique, on utilise les mêmes notations qu'en cours et à l'Exercice 2 de TD2. On fixe $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 3$ assez grand, on pose $h = \frac{b-a}{N+1}$, on pose $x_i = a + ih$ pour tout $i \in \{0, 1, \cdots N+1\}$ et on note par U_i une approximation de $u(x_i)$.
Pour discrétiser (1) on va noter par $W_{i+1/2}$ une approximation de $\gamma(x_i + h/2)u'(x_i + h/2)$ pour tous $i = 0, 1, 2, \cdots N$; cette approximation sera $W_{i+1/2} = \gamma(x_i + h/2)\frac{U_{i+1} - U_i}{h}$ (par commodité il sera préférable de noter $\gamma_{i+1/2} = \gamma(x_i + h/2)$). On approchera ensuite $(\gamma u')'(x_i)$ par $\frac{W_{i+1/2} - W_{i-1/2}}{h}$.
D'autre part pour (2) et (3) on va approcher $u(a)$ par U_0 et $u'(b)$ par $\frac{U_{N+1} - U_N}{h}$.

a) Ecrire l'approximation de (3) proposée et exprimer U_{N+1} en fonction de U_N.

b) Ecrire un système algébrique linéaire d'inconnues $U_1, U_2, \cdots U_N$ qui approche le problème (1), (2) et (3). Ecrire ce système sous la forme matricielle $AU = b$ avec $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^N$ à préciser.

c) Montrer que A est une matrice symétrique et définie positive.

Exercice 2.

On se donne $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, un vecteur $b \in \mathbb{C}^n$ et on considère la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les colonnes sont le vecteur b, c'est à dire

$$A_{ij} = b_i, \quad \forall\, i, j \in [[1, n]].$$

On se donne aussi $p \in \mathbb{R}$ avec $p > 1$ et nous notons par $q > 1$ l'unique nombre tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On se propose de montrer que

$$\|A\|_p = n^{1/q}\|b\|_p \tag{4}$$

où $\|A\|_p$ désigne la norme matricielle de A subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|_p$

$$(\text{rappel} \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n).$$

Nous admettons le résultat suivant:

$$|\langle u\,,\, v\rangle| \leq \|u\|_p\, \|v\|_q, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{C}^n.$$

Cette inégalité s'appelle "l'inégalité de Holder en $\mathbb{C}^n$".
On cherchera à montrer (4) en montrant une double inégalité.

a) On se propose ici de montrer l'inégalité "$\leq$" de (4). On considère alors $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ arbitraire avec $\|x\|_p = 1$.

a1) Montrer que

$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) b.$$

a2) En déduire l'inégalité

$$\|Ax\|_p \leq n^{1/q} \|b\|_p.$$

Indication: voir la somme $\sum_{j=1}^{n} x_j$ comme le produit scalaire entre le vecteur x et un vecteur à préciser. Utiliser alors l'inégalité de Holder en $\mathbb{C}^n$.

a3) En déduire l'inégalité

$$\|A\|_p \leq n^{1/q} \|b\|_p.$$

b) On se propose ici de montrer l'inégalité "$\geq$" de (4). On utilise ici le vecteur $y \in \mathbb{C}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

b1) Montrer que le vecteur $z = n^{-1/p} y \in \mathbb{C}^n$ est tel que $\|z\|_p = 1$.

b2) Calculer Az et l'écrire comme le produit entre un scalaire à préciser et le vecteur b.

b3) En déduire que $\|Az\|_p = n^{1/q} \|b\|_p$ et en déduire l'inégalité

$$\|A\|_p \geq n^{1/q} \|b\|_p.$$

Exercice 3.

Dans cet exercice on suppose $n \in \mathbb{N}^*$ et on notera par $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qui sont orthogonales.
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **antisymetrique** si $A^T = -A$.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymetrique. Montrer que A est à diagonale nulle (c'est à dire $A_{ii} = 0,\ \forall\, i \in [[1, n]]$).

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymetrique. Montrer que pour toute $P \in O_n(\mathbb{R})$ la matrice $P^T AP$ est à diagonale nulle.

Indication: montrer que $P^T AP$ ast antisymetrique.

c) On se propose ici de montrer la réciproque de **b)**. On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui a la propriété que pour toute matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ la matrice $P^T AP$ est à diagonale nulle et on se propose de montrer que A est antisymetrique.

c1) Montrer que A peut s'écrire sous la forme $A = B + C$ avec $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où B est symetrique et C antisymetrique.

Indication: choisir B et C comme des combinaisons linéaire appropriées des matrices A et A^T.

c2) En déduire le résultat souhaité.

Indication: rappelons que B peut s'écrire sous la forme $B = QDQ^T$ avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale.