Polytech Lyon, MAM3A, 2022-2023

Analyse Numérique (AN)

Partiel 2 - décembre 2022

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & 0 \\ b & 0 & 2 \end{pmatrix}$, avec $b \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $det(A)$ en fonction de b et trouver $b \in \mathbb{R}$ tel que la matrice A soit inversible.
b) Ecrire la matrice J de la méthode itérative de Jacobi pour la résolution numérique des systèmes algébriques linéaires ayant A comme matrice des coefficients.
Montrer que le polynôme caractéristique de J est donnée par l'expression

$$P_J(\lambda) = \lambda \left(-\lambda^2 + \frac{3}{2} b^2 \right), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

c) Pour quels valeurs $b \in \mathbb{R}$ la méthode itérative de Jacobi converge-t-elle?

Exercice 2.

Soit $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \exp(-2x), \quad \forall\, x \in [1,3].$$

a) Construire le polynome d'interpolation de Lagrange de f aux points $y_0 = 1,\ y_1 = 2$ et $y_1 = 3$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ on considère la division suivante sur $[1,3]$: on pose $h = \frac{2}{n}$ et ensuite $x_j = 1 + j\,h,\ j \in [[0,n]]$.
On considère alors P_n le polynome d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, x_1, \cdots x_n$.
On pose $E_n(x) = P_n(x) - f(x)$ (l'erreur d'interpolation) et on se propose de montrer que

$$\sup_{x \in [1,3]} |E_n(x)| \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to +\infty.$$

b1) Montrer qu'on a

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq \frac{2^{n+1}}{e^2}, \quad \forall\, x \in [1,3].$$

b2) Majorer par une constante indépendante de x (mais dépendante de n) l'expression

$$|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \qquad \text{pour} \quad x \in [1,3].$$

b3) Montrer le résultat attendu.

Exercice 3.

Le but de cet exercice est de faire la preuve d'une partie d'un théorème vu en cours.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Rappelons que pour tout $p \in [[1,n]]$ nous considérons la sous-matrice principale $A_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de A avec $(A_p)_{ij} = A_{ij}, \quad \forall\, i,j \in [[1,p]]$.

Partie I.
Supposons que A admet une décomposition LU (*rappel: L est une matrice triangulaire inférieure avec* 1 *sur la diagonale et U est une matrice triangulaire supérieure et inversible*). Montrer que pour tout $p \in [[1, n]]$ la sous-matrice principale A_p de A est inversible.

Partie II.
Nous montrons ici la réciproque de la **Partie I.** On suppose donc que pour tout $p \in [[1, n]]$ la sous-matrice principale A_p de A est inversible et on se propose de montrer que A admet une décomposition LU. L'idée de la preuve est de montrer par récurrence sur p que pour tout $p \in [[1, n]]$ la sous-matrice principale A_p de A admet une décomposition LU. On aura alors la résultat souhaité en prenant $p = n$.

IIa) (*Initialisation*) Montrer que A_1 admet une décomposition LU.

IIb) (*Hérédité*) On suppose que pour un $p \in [[1, n-1]]$ donné la sous-matrice A_p admet une décomposition LU, donc $A_p = L_pU_p$ avec $L_p, U_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ayant les propriétés souhaitées.
Montrer que la sous-matrice A_{p+1} peut s'écrire par blocs sous la forme

$$A_{p+1} = \begin{pmatrix} L_p & 0 \\ b_p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_p & c_p \\ 0 & d_p \end{pmatrix}$$

avec $b_p \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $c_p \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $d_p \in \mathbb{K}$ à trouver (ici 0 signifie la matrice 0 dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ ou dans $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ respectivement).
En déduire le résultat souhaité.