Polytech Lyon, MAM3A, 2022-2023

Analyse Numérique (AN)

Partiel 3

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.
Nous considérons l'équation algébrique non linéaire suivante : trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$x(1+e^x) = e^x. \tag{1}$$

a) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution r de (1) dans l'intervalle $[0,1]$.
b) Montrer que $x \in \mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si x est un point fixe de la fonction g avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Nous introduisons la suite (x_n) construite par la méthode des approximations successives :

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

avec $x_0 \in [0,1]$ donné.
c) Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable pour la fonction g.
d) Montrer que g est strictement contractante sur $[0,1]$.
e) En déduire la convergence de la suite (x_n) vers r.

Exercice 2.
On considère l'équation différentielle scalaire : trouver $y = y(t)$ une fonction de classe C^1 telle que

$$y' = 6te^{2y}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

a) Trouver toutes les solution de (2) avec leurs intervalles d'existence.
b) Trouver la solution y de (2) satisfaisant en plus la condition initiale

$$y(-2) = 1 \tag{3}$$

(*problème de Cauchy*). Cette solution est-elle globale ?

Exercice 3.
Le but de cet exercice est de donner des estimations d'erreurs plus simple pour les formules de Simpson que celles qui utilisent le noyau du Peano.
a) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$ et $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction arbitraire telle que $g \in C^4([\alpha, \beta])$. On pose $I(g) = \int_\alpha^\beta g(t)\,dt$ et $I_2(g)$ l'approximation de $I(g)$ obtenue en utilisant la méthode simple de Simpson :

$$I_2(g) = \frac{\delta}{6}[g(\alpha) + 4g(\gamma) + g(\beta)]$$

où nous notons

$$\delta = \beta - \alpha \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Nous notons $e_2(g) = I(g) - I_2(g)$ l'erreur d'approximation.
Dans la suite pour tout $y \in]\alpha, \beta[\setminus \{\gamma\}$ nous notons par $P_{3,y} \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ le polynome d'interpolation de Lagrange de g aux points α, γ, β et y.

Le but de cette partie est de montrer que

$$|e_2(g)| \leq \frac{\delta^5}{2880} \max_{t \in [\alpha, \beta]} |g^{(4)}(t)|. \tag{4}$$

(nous notons par $g^{(k)}$ la dérivée à l'ordre k de g pour tout $k \in \mathbb{N}$).

a1) Montrer que pour tout $y \in]\alpha, \beta[\setminus \{\gamma\}$ on a

$$I_2(g) = \int_\alpha^\beta P_{3,y}(t)\, dt.$$

(*Indication : utiliser le fait que la formule simple de Simpson est d'ordre 3*).

a2) Montrer que pour tout $y \in]\alpha, \beta[\setminus \{\gamma\}$ on a

$$|e_2(g)| \le \frac{1}{24} \max_{t\in[\alpha,\beta]} |g^{(4)}(t)| \int_\alpha^\beta |\theta_y(t)|\, dt \tag{5}$$

où nous posons

$$\theta_y(t) = (t-\alpha)(t-\gamma)(t-\beta)(t-y), \quad \forall\, t \in [\alpha, \beta].$$

a3) Nous admettons ici la continuité de la fonction $y \in [\alpha, \beta] \mapsto \int_\alpha^\beta |\theta_y(t)|\, dt$. En passant à la limite $y \to \gamma$ dans l'inégalité (5) montrer l'inégalité (4).

b) Le but de cette partie est de faire une estimation d'erreur pour la méthode de Simpson composée. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^4 sur $[a, b]$; nous notons $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$. On considère $n \in \mathbb{N}^*$ avec n grand et on pose $h = \frac{b-a}{n}$ et $a_k = a + kh,\ k = 0, 1, \cdots n$. On écrit alors :

$$I(f) = \sum_{k=1}^n I_k(f)$$

où on pose $I_k(f) = \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\, dx$ pour tout $k \in [[1, n]]$. Nous faisons le changement de variable vu en cours et nous écrivons

$$I_k(f) = h \int_0^1 g_k(t)\, dt$$

avec $g_k : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad g_k(t) = f(a_{k-1} + th)$.
La méthode de Simpson composée consiste alors à approcher $\int_0^1 g_k(t)\, dt$ par
$\frac{1}{6}[g_k(0) + 4g_k(1/2) + g_k(1)]$.

b1) Montrer que pour tout $k \in [[1, n]]$ l'intégrale $I_k(f)$ sera approchée par J_k où nous posons

$$J_k = \frac{h}{6}\left[f(a_{k-1}) + 4f\left(\frac{a_{k-1} + a_k}{2}\right) + f(a_k)\right]$$

et en déduire que $I(f)$ sera approché par $S_n(f)$ avec

$$S_n(f) = \frac{h}{6}\sum_{k=1}^n \left[f(a_{k-1}) + 4f\left(\frac{a_{k-1} + a_k}{2}\right) + f(a_k)\right].$$

b2) En utilisant le résultat de **a)** montrer qu'on a l'estimation d'erreur

$$|I(f) - S_n(f)| \le \frac{b-a}{2880} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|\, h^4.$$