Corrigé Partiel 1 AN 2023-2024

Exo 1.

a) $\dfrac{U_{N+1}-U_N}{h}=\beta$

Ceci donne $U_{N+1}=U_N+\beta h.$

b) Si on remplace en (1) pour $x=x_i$ $(i=1\ldots N)$ les approximations proposées, on trouve

$$-\frac{U_{i-1}-2U_i+U_{i+1}}{h^2}=f(x_i) \quad , i=1\ldots N$$

c'est à dire

$$-U_{i-1}+2U_i-U_{i+1}=h^2f(x_i) \qquad i\in [\![1,N]\!]$$

Pour $i=1$ on remplace U_0 par α, ce qui donne

$$2U_1-U_2=h^2f(x_1)+\alpha$$

Pour $i=N$ on remplace U_{N+1} par $U_N+\beta h$ ce qui donne

$$-U_{N-1}+2U_N-U_N-\beta h=h^2f(x_N)$$

c'est à dire

$$-U_{N-1}+\cancel{2}U_N=h^2f(x_N)+\beta h$$

Finalement le système s'écrit.

$$\begin{cases} 2U_1-U_2=b_1 \\ -U_{i-1}+2U_i-U_{i+1}=b_i & i=2\ldots N-1 \\ -U_{N-1}+2U_N=b_N \end{cases}$$

avec les notations

$b_1=h^2f(x_1)+\alpha$

$b_i=h^2f(x_i)$, $i=2\ldots N-1$

$b_N=h^2f(x_N)+\beta h$

On pose $b=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_N\end{pmatrix}$; $U=\begin{pmatrix} U_1\\ \vdots \\ U_N\end{pmatrix}$ (vecteur inconnu)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \\ & - & - & - & - & \vdots \\ & & & & & 0 \\ \cdots & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ c'est à dire

$$A_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \leq N-1 \\ 1 & \text{si } i = j = N \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{si } |i-j| \geq 2 \end{cases}$$

et notre système s'écrit sous la forme

$AU = b$

e) Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Alors

$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_i x_j = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + \cdots - 2x_{N-2}x_{N-1} + 2x_{N-1}^2 - 2x_{N-1}x_N + x_N^2$

$= x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 - 2x_3x_4 + x_4^2 + \cdots + x_{N-2}^2 - 2x_{N-2}x_{N-1} + x_{N-1}^2 + x_{N-1}^2 - 2x_{N-1}x_N + x_N^2$

$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots (x_{N-1} - x_N)^2$

Il est évident que $\forall x \in \mathbb{R}^N$

$\langle Ax, x \rangle \geq 0$ (somme des carrées)

Ensuite si $\langle Ax, x \rangle = 0$ alors

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_{N-1} - x_N = 0 \end{cases}$$

Ceci donne $x = 0$

donc A définie positive

Il est évident que A est symétrique

Alors A est <u>SDP</u>.

Exo 2.

a)

a1) $A = \begin{pmatrix} \bar b_1 & \bar b_2 & \cdots & \bar b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (écriture par blocs)

Alors $(Ax)_1 = \sum_{i=1}^{n} \bar b_i x_i = \cancel{\langle b, x\rangle}\ \langle x, b\rangle$

$(Ax)_i = 0 \quad \forall i = 2 \cdots N$

a2) $\|Ax\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i|^p\right)^{1/p} = \left(|\langle x, b\rangle|^p\right)^{1/p}$

$= |\langle x, b\rangle|$

~~Alors~~

~~$\|Ax\|$~~ Comme $|\langle x, b\rangle| \le \|b\|_q \|x\|_p$ et $\|x\|_p = 1$ nous avons $\forall x \in \mathbb{C}^n$ avec $\|x\|_p = 1$.

$\|Ax\|_p \le \|b\|_q$

a3) On passe au sup en $x \in \mathbb{C}^n$ avec $\|x\|_p = 1$

ce qui donne

$\|A\|_p \le \|b\|_q$.

b)

b1) $p(q-1) = q \iff$ (diviser par pq) $\frac{q-1}{q} = \frac{1}{p} \iff$

$1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p} \iff 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$ vraie.

b2) On sait que

$\|Ay\|_p = |\langle b, y\rangle|$ (voir a2)) $= \left|\sum_{i=1}^{n} b_i y_i\right|$

$= \sum_{\substack{i=1 \\ b_i \neq 0}}^{n} b_i \frac{1}{\|b\|_q^{q-1}} |b_i|^{q-2} \bar b_i + \sum_{\substack{i=1 \\ b_i = 0}}^{n} 0$

$= \frac{1}{\|b\|_q^{q-1}} \sum_{\substack{i=1 \\ b_i \neq 0}}^{n} |b_i|^q$ (car $b_i \bar b_i = |b|^2$) $+ 0$

Ensuite $\|Y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\|b\|_q^{q-1}}\right)^p \left(|b_i|^{q-2}|b_i|\right)^p\right]^{1/p}$

car $p(q-1)=q$

$\stackrel{\text{car } p(q-1)=q}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|b\|_q^q} |b_i|^q\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{\|b\|_q^q} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q}_{=\|b\|_q^q}\right)^{1/p} = 1^{1/p} = 1$

b2) $\|AY\|_p \stackrel{\text{de a2)}}{=} |\langle Y, b\rangle| = \sum_{i=1}^{n} y_i \bar{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|b\|_q^{q-1}} |b_i|^{q-2} b_i \bar{b}_i$

car $b_i\bar{b}_i = |b_i|^2$

$\stackrel{\text{car } b_i\bar{b}_i = |b_i|^2}{=} \frac{1}{\|b\|_q^{q-1}} \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q = \frac{1}{\|b\|_q^{q-1}} \|b\|_q^q = \|b\|_q .$

b3) $\sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_p = 1}} \|Ax\|_p \stackrel{(\text{car } \|Y\|_p = 1)}{\geq} \|AY\|_p \stackrel{\text{de b2)}}{=} \|b\|_q$

donc

$\|A\|_p \geq \|b\|_q$

Avec a) on deduit $\|A\|_p = \|b\|_q$

<u>Exo 3</u>

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. On calcule AV_ω

$(AV_\omega)_1 = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \dots\dots a_{n-1}\omega^{n-1} = P(\omega)$

où nous posons

$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$

$(AV_\omega)_2 = a_{n-1} + a_0\omega + a_1\omega^2 + \dots\dots a_{n-2}\omega^{n-1} \stackrel{\text{car } \omega^n = 1}{=}$

$= a_0\omega + a_1\omega^2 + \dots\dots a_{n-2}\omega^{n-1} + a_{n-1}\omega^n = \omega P(\omega)$

Pour $j \in \{2 \dots n\}$ arbitraire on a

$$(AV_\omega)_j = a_{n-j+1} + a_{n-j+2}\,\omega + \dots a_{n-1}\,\omega^{j-2} + a_0\,\omega^{j-1} + \dots a_{n-j}\,\omega^{n-1} = a_0\,\omega^{j-1} + a_1\,\omega^{j} + \dots a_{n-j}\,\omega^{n-1} + a_{n-j+1}\underbrace{\omega^{n}}_{=1} + a_{n-j+2}\underbrace{\omega^{n+1}}_{=\omega} + \dots a_{n-1}\,\omega^{n+j-2}$$

$$= \omega^{j-1}P(\omega)$$

On a donc

$$AV_\omega = P(\omega)\,V_\omega$$

Comme $V_\omega \neq 0$ alors $P(\omega)$ est valeur propre de A et V_ω en est un vecteur propre correspondant

b) On utilise le resultat de a) avec $n=4$

$a_0 = -1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$

Un element complexe non reel de U_4 est $e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$

$(i^4 = 1)$

Alors une valeur propre de A est $P(i)$ avec

$$P(i) = -1 + 2i + 3i^2 + 0 = -4 + 2i$$

Un vecteur propre correspondant est $V_i = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \\ i^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$