Corrigé Partiel 2 AN

Exercice 1.

a) On considère la matrice du système $S = (A \quad b)$

On pose $S^{(1)} = S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

On introduit $\alpha_2^{(1)} = \frac{2}{1} = 2$; $\alpha_3^{(1)} = \frac{4}{1} = 4$

Pour $S^{(1)}$: ligne 2 $\longleftarrow$ ligne 2 $- 2 \cdot$ ligne 1
ligne 3 $\longleftarrow$ ligne 3 $- 4$ ligne 1

Alors $S^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

On introduit $\alpha_3^{(1)} = \frac{-3}{-3} = 1$

Pour $S^{(2)}$ ligne 3 $\longleftarrow$ ligne 3 $-$ ligne 2

$$S^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} = (A^{(3)}, b^{(3)})$$

avec $A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $b^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

le système du départ est équivalent à $A^{(3)} x = b^{(3)}$ c'est à dire :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ -3x_2 - 2x_3 = -2 \\ -2x_3 = 8 \end{cases}$$

On résoud par une remontée

$$\begin{cases} x_3 = \frac{8}{-2} = -4 \\ -3x_2 = -2 + \cancel{3(-4)}\ 2x_3 \\ x_1 = -1 - x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

donc $x_3 = -4$
$x_2 = \cancel{4}\ 10/3$
$x_1 = \cancel{11}\ 11/3$

b) D'après la théorie, la décomposition LU est $A = LU$ avec $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2^{(1)} & 1 & 0 \\ \alpha_3^{(1)} & \alpha_3^{(2)} & 1 \end{pmatrix}$; $U = A^{(3)}$

donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad U = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Résoudre $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b$

On fait le changement d'inconnue $y = Ux$ donc

$Ly = b$ donc $\begin{cases} y_1 = -1 \\ 2y_1 + y_2 = -4 \\ 4y_1 + y_2 + y_3 = 2 \end{cases}$

On résoud par une descente : $\begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = -4 - 2y_1 \\ y_3 = 2 - 4y_1 - y_2 \end{cases}$

donc $\begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = -2 \\ y_3 = 8 \end{cases}$

On résoud ensuite $Ux = y$ (en x) donc

$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ -3x_2 - 2x_3 = -2 \\ -2x_3 = 8 \end{cases}$

On trouve comme en a)

$x_1 = 11/3$

$x_2 = 10/3$

$x_3 = -4$

d) On écrit $U = D\hat{U}$ avec $D = \mathrm{diag}(u_{11}, u_{22}, u_{33}) = \mathrm{diag}(1, -3, -2)$

$$\hat{U} = D^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Possible car U est inversible donc $u_{ii} \neq 0 \ \forall i = 1, 2, 3$ donc D inversible

Exercice 2.

a) $P(x) = Q(x^2) = Q((-x)^2) = P(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

b) $$L_0(x) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x - x_j}{0 - x_j} \quad \frac{x - x_{-j}}{0 - x_{-j}} \right) = \prod_{j=1}^{n} \frac{(x - x_j)(x + x_j)}{(-x_j)\, x_j}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left(-\frac{1}{x_j^2}\right) \prod_{j=1}^{n} (x^2 - x_j^2) \qquad \text{donc} \quad C = \prod_{j=1}^{n} \left(-\frac{1}{x_j^2}\right)$$

De a) L_0 est un polynome pair.

c) Si $k \in [\![1, n]\!]$ $$L_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad \frac{x - 0}{x_k - 0} \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_{-j}}{x_k - x_{-j}}$$

$$= \frac{x}{x_k} \quad \frac{x - x_{-k}}{x_k - x_{-k}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad \frac{x + x_j}{x_k + x_j}$$

donc
$$L_k(x) = \frac{x}{x_k} \quad \frac{x + x_k}{2x_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x^2 - x_j^2}{x_k^2 - x_j^2}$$

Ensuite
$$L_{-k}(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j}{x_{-k} - x_j} \quad \frac{x - 0}{x_{-k} - 0} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_{-j}}{x_{-k} - x_{-j}}$$

$$= \frac{x}{-x_k} \quad \frac{x - x_k}{x_{-k} - x_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)(x - x_{-j})}{(x_k + x_j)(x_k - x_j)}$$

donc
$$L_{-k}(x) = \frac{x}{x_k} \quad \frac{x - x_k}{2x_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x^2 - x_j^2}{x_k^2 - x_j^2}$$

d) $$(L_k + L_{-k})(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x^2 - x_j^2}{x_k^2 - x_j^2} \quad \frac{x}{2x_k^2} \left(x + \cancel{x_k} + x - \cancel{x_k} \right)$$

$$= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x^2 - x_j^2}{x_k^2 - x_j^2} \quad \frac{x^2}{x_k^2}$$

c'est de la forme $Q(x^2)$ donc $L_k + L_{-k}$ est pair

e) $P(x) = \sum_{k \in [\![-n,n]\!]} f(x_k) L_k(x)$

$= f(x_0) L_0(x) + \cancel{f(x_k)} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \left[L_k(x) + L_{-k}(x) \right]$

car $f(x_k) = f(-x_k)$)

Alors de a) et d) P est un polynome pair.

<u>Exercice 3</u>

a) λ est valeur propre de $M^{-1}N$ donc $\det(M^{-1}N - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow$

donc $\det\left(\left(\frac{1}{\omega} D - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right) - \lambda I_n \right) = 0$

$\underbrace{\det\left(\left(\frac{1}{\omega} D - E\right)^{-1}\right)}_{\neq 0} \det\left(\underbrace{\frac{1-\omega}{\omega} D + F - \lambda\left(\frac{1}{\omega} D - E\right)}_{= \frac{1-\omega-\lambda}{\omega} D + \lambda E + F} \right) = 0$

donc $\det\left(\frac{1-\omega-\lambda}{\omega} D + \lambda E + F \right) = 0 \Rightarrow$

$\frac{1-\omega-\lambda}{\omega} D + \lambda E + F$ est non inversible

Alors il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que

$\left| \underbrace{\left(\frac{1-\omega-\lambda}{\omega} D + \lambda E + F \right)_{ii}}_{= \frac{1-\omega-\lambda}{\omega} A_{ii}} \right| \leq \sum_{j < i} \left| \overbrace{\left(\frac{1-\omega-\lambda}{\omega} D + \lambda E + F \right)_{ij}}^{= -\lambda A_{ij}} \right| + \sum_{j > i} \left| \underbrace{\left(\frac{1-\omega-\lambda}{\omega} D + \lambda E + F \right)_{ij}}_{= -A_{ij}} \right|$

donc

$\left| \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega} A_{ii} \right| \leq |\lambda| \sum_{j<i} |A_{ij}| + \sum_{j>i} |A_{ij}|$

b) Nous utilisons $|\cancel{x} - y| \geq |x| - |y|$

donc $|\lambda + \omega - 1| = |\lambda - (1-\omega)| \geq |\lambda| - |1-\omega| =$

$= |\lambda| - (1-\omega)$

car $\cancel{\omega}$ $1 - \omega \geq 0$

Alors de a)

$$\left[|\lambda| - (1-\omega)\right] |A_{ii}| \leq |\lambda| \omega \sum_{j<i} |A_{ij}| + \omega \sum_{j>i} |A_{ij}|$$

donc

$$|\lambda| \left[\underbrace{|A_{ii}| - \omega \sum_{j<i} |A_{ij}|}_{>0} \right] \leq (1-\omega) |A_{ii}| + \omega \sum_{j>i} |A_{ij}|$$

car $|A_{ii}| > \sum_{j<i} |A_{ij}| \geq \omega \sum_{j<i} |A_{ij}|$

car $\omega > 0$

Alors

$$|\lambda| \leq \frac{(1-\omega) |A_{ii}| + \omega \sum_{j<i} |A_{ij}|}{|A_{ii}| - \omega \sum_{j<i} |A_{ij}|}$$

ceci ~~$\forall \lambda \in VP(A)$~~ $\forall \lambda \in VP(M^{-1}N)$

c) Il faut montrer

$$\frac{(1-\omega) |A_{ii}| + \omega \sum_{j<i} |A_{ij}|}{|A_{ii}| - \omega \sum_{j<i} |A_{ij}|} < 1$$

. c'est equivalent à

$$\underbrace{(1-\omega) |A_{ii}|}_{= \cancel{|A_{ii}|} - \omega |A_{ii}|} + \omega \sum_{j<i} |A_{ij}| < \cancel{|A_{ii}|} - \omega \sum_{j<i} |A_{ij}| \iff$$

$$-\omega |A_{ii}| + \omega \sum_{j<i} |A_{ij}| < -\omega \sum_{j<i} |A_{ij}|$$

$$\iff \omega |A_{ii}| > \omega \left(\sum_{j<i} |A_{ij}| + \sum_{j>i} |A_{ij}| \right)$$

on simplifie par ω. $\underline{\text{Ok!}}$

Donc $|\lambda| < 1 \quad \forall \lambda \in VP(M^{-1}N) \Rightarrow \rho(M^{-1}N) < 1.$