Corrigé Partiel 3 AN . 2023-2024

Exo 1.

a) Il faut avoir $I(x^k) = I_2(x^k)$, $\forall k \in [\![0,5]\!]$

- $I(1) = I_2(1) \iff$
  $2 = \alpha(1+1) + \gamma \iff 2\alpha + \gamma = 2$
- $I(x) = I_2(x) \iff$
  $0 = 0$ toujours vraie
- $I(x^2) = I_2(x^2) \iff$
  $\frac{2}{3} = \alpha(\beta^2+\beta^2) + 0 \iff 2\alpha\beta^2 = \frac{2}{3} \iff \alpha\beta^2 = \frac{1}{3}$
- $I(x^3) = I_2(x^3) \iff$
  $0 = 0$ toujours vraie
- $I(x^4) = I_2(x^4) \iff$
  $\frac{2}{5} = \alpha(\beta^4+\beta^4) \iff 2\alpha\beta^4 = \frac{2}{5} \iff \alpha\beta^4 = \frac{1}{5}$
- $I(x^5) = I_2(x^5) \iff$
  $0 = 0$ toujours vraie.

Alors la formule (1) est d'ordre au moins 5 $\iff$ α, β, γ satisfont le système

$$\begin{cases} 2\alpha + \gamma = 2 & (1)' \\ \alpha\beta^2 = \frac{1}{3} & (2)' \\ \alpha\beta^4 = \frac{1}{5} & (3)' \end{cases}$$

~~On a~~ De $(2') \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3\beta^2}$

On remplace en $(3)' \Rightarrow$

$\frac{\beta^2}{3} = \frac{1}{5} \iff \beta^2 = \frac{3}{5} \iff \beta = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$

Comme $\beta \in]0,1[$ on choisit $\beta = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

On remplace en $(2)' \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3\beta^2} = \frac{1}{3}\,\frac{5}{3} = \frac{5}{9} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{9}$

De $(1)' \Rightarrow \gamma = 2 - 2\,\frac{5}{9} = \frac{8}{9}$

Donc
$$\begin{cases} \alpha = \frac{5}{9} \\ \beta = \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \gamma = \frac{8}{9} \end{cases}$$

b) Pour que la formule soit d'ordre 5 il faut
$I(x^6) \neq I_2(x^6)$

$I(x^6) = \frac{2}{7}$

$I_2(x^6) = \cancel{\alpha[f(-\beta)+f(\beta)]+0} = \cancel{\alpha(} \ \alpha(\beta^6+\beta^6)+0 = 2\alpha\beta^6$

donc

$I_2(x^6) = 2\,\frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6 = \frac{10}{9}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{6}{25}$

$\frac{2}{7} \neq \frac{6}{25}$ donc formule d'ordre 5.

Exo 2.

a) On applique la formule de Duhamel

$y(t) = e^{-2t}\cdot 1 + \underbrace{\int_0^t e^{-2(t-s)}(1+2s)\,ds}_{= e^{-2t}\int_0^t e^{2s}(1+2s)\,ds}$

On a en intégrant par parties

$\int_0^t e^{2s}(1+2s)\,ds = \int_0^t \left(\frac{e^{2s}}{2}\right)'(1+2s)\,ds = \frac{e^{2t}}{2}(1+2t) - \frac{1}{2} -$

$\underbrace{-\int_0^t \frac{e^{2s}}{2}\underbrace{(1+2s)'}_{=2}ds}_{= \int_0^t e^{2s}ds = \frac{1}{2}(e^{2t}-1)}$

Donc

$\int_0^t e^{2s}(1+2s)\,ds = \cancel{\frac{e^{2t}}{2}} + te^{2t} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{e^{2t}}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} = te^{2t}$

Alors

$y(t) = e^{-2t} + te^{2t}e^{-2t}$ donc

$y(t) = t + e^{-2t}$

b i) ~~$y_1 = t+h$~~

On pose $f(t,x) = 1+2t-2x$
$f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$y_0 = 1 \ ; \ t_0 = 0$

~~$y_1 = t + h f(t_0,$~~

$y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0)$

donc

$$y_1 = 1 + \frac{1}{10}(1+0-2) = 1 - \frac{1}{10} = \cancel{0,9}\ \frac{9}{10} = 0,9$$

$$y_2 = y_1 + h f(t_1, y_1) = 0,9 + \frac{1}{10}\left(1 + \frac{2}{10} - 2\,\frac{9}{10}\right)$$

$$= 0,9 - 0,06 = 0,84.$$

$y_2 = 0,84.$

b ii)

$$\begin{cases} k_1 = f(t_0, y_0) \\ k_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} k_1) \\ y_1 = y_0 + h k_2 \end{cases}$$

$k_1 = 1 + 0 - 2$ donc $k_1 = -1$

$$k_2 = 1 + 2\,\frac{1}{20} - 2\left[1 + \frac{1}{20}(-1)\right] = 1 + \frac{1}{10} - 2 + \frac{1}{10} = -\frac{8}{10}$$

$k_2 = -\frac{8}{10} = -0,8$

$y_1 = 1 - \frac{1}{10}\,\frac{8}{10} = 0,92$

c) De a) nous avons

$$y(t_1) = t_1 + e^{-2t_1} = 0,1 + e^{-0,2} \simeq 0,1 + 0,8187$$

donc

$y(t_1) \simeq 0,9187$

Pour la méthode d'Euler explicite l'erreur est

$|0,9187 - 0,9| = 0,0187$

Pour la méthode RK2 l'erreur est

$|0,9187 - 0,92| = 0,0013$

Comme attendu, on a une meilleure précision avec la méthode RK2 qu'avec la méthode d'Euler explicite.

Exercice 3

a) On va utiliser la récurrence pour montrer

$x_k \in]r, r+h[\quad \forall k \in \mathbb{N}$

(avec h à choisir ultérieurement

si $k=0$ c'est vrai par hypothèse

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que

$x_k \in]r, r+h[$.

On a :

$$x_{k+1} = f(x_k) = x_k + b(x_k - r)^2 + \alpha(x_k)(x_k-r)^2$$

Alors

$$x_{k+1} - r = (x_k - r)\left[1 + b(x_k - r) + (x_k - r)\alpha(x_k)\right]$$

Considérons la fonction

$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad g_1(y) = 1 + b(y-r) + (y-r)\alpha(y)$

donc

$$(4)' \quad x_{k+1} - r = (x_k - r)\, g_1(x_k)$$

On a : $\lim\limits_{y \to r} g_1(y) = 1$.

Alors $\exists\, h_1 > 0$ tel que $g_1(y) > 0$, $\forall y \in]r, r+h_1[$

D'autre part

$$x_{k+1} - x_k = b(x_k - r)^2 + \alpha(x_k)(x_k - r)^2 = (x_k - r)^2\,(b + \alpha(x_k))$$

$$(5)' \quad x_{k+1} - x_k = (x_k - r)^2 g_2(x_k) \quad \text{avec}$$

$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad g_2(y) = b + \alpha(y)$

On a : $\lim\limits_{y \to r} g_2(y) = b < 0$

Alors $\exists\, h_2 > 0$ tel que $g_2(y) < \frac{b}{2} < 0$, $\forall y \in]r, r+h_2[$

On prend

$h = \min\{h_1, h_2\}$

donc $\forall y \in]r, r+h[$

$g_1(y) > 0$

et $\forall y \in]r, r+h[$

$g_2(y) < \frac{b}{2}$

Comme $x_k \in]r, r+h[$ par hypothèse de récurrence alors > 0 donc

de $(4)' \Rightarrow x_{k+1} - r = \underbrace{(x_k - r)}_{>0}\ \underbrace{g_1(x_k)}_{>0}$

$x_{k+1} > r$ $\qquad < 0$ donc

de $(5)' \Rightarrow x_{k+1} - x_k = \underbrace{(x_k - r)}_{>0}\ \underbrace{g_2(x_k)}_{<0}$

$x_{k+1} < r+h$ (car $x_k < r+h$)

Donc $x_{k+1} \in]r, r+h[$ ce qui finit la preuve

b) On a vu dans la preuve de a) que

$$x_{k+1} - x_k = \underbrace{(x_k - r)}_{>0}\, \underbrace{g_2(x_k)}_{<0} < 0$$

~~donc x~~ ceci pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Alors (x_k) est strictement décroissante

c) Comme (x_k) est borné (de a)) et strictement décroissante (de b)) alors (x_k) est convergente.

Alors il existe $l \in [r, r+h]$ tel que

$x_k \to l$ si $k \to \infty$.

Comme $x_k < x_0 \Rightarrow l \leq x_0$ et $x_0 < r+h$, donc $l < r+h$, donc $l \in [r, r+h[$.

~~On passe à la limite $k \to \infty$ dans (5)'~~

~~$l = l - (l-r)^2$~~

On va montrer $l = r$

Supposons par absurd que $l > r$

Nous avons de (5)':

$$(6)' \quad x_{k+1} - x_k = (x_k - r)^2\, g_2(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

~~Pour k assez grand~~ Comme $(x_k - r)^2 \xrightarrow{k \to \infty} (l-r)^2 > 0$

on a $(x_k - r)^2 > \frac{(l-r)^2}{2}$.

alors pour k assez grand (vu preuve a)) $g_2(x_k) < \frac{b}{2} < 0$

On a aussi

Alors $g_2(x_k)(x_k - r)^2 < \frac{b}{2}(x_k - r)^2 < \frac{b}{2}\frac{(l-r)^2}{2}$, $\forall k$ assez grand

donc

$$g_2(x_k)(x_k - r)^2 < \underbrace{\frac{b}{4}(l-r)^2}_{<0} \quad \text{(nombre fixe négatif)}$$

D'autre coté

$x_{k+1} - x_k \to 0$ (car $x_k \to l$)

Contradiction avec (6)'. Donc $l = r$.