Polytech Lyon, MAM3A, 2023-2024

Analyse Numérique (AN)

Partiel 1 - 2023

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert borné dans $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On se donne aussi une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $f \in C(\bar{\Omega})$.

On considère l'équation différentielle avec conditions aux limites du type mixte suivante: trouver $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ satisfaisant

$$-u''(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \Omega \tag{1}$$

avec

$$u(a) = \alpha \tag{2}$$

et

$$u'(b) = \beta. \tag{3}$$

Pour approcher le problème par un système linéaire algébrique, on utilise la méthode et les notations du cours. On fixe $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 3$ assez grand, on pose $h = \frac{b-a}{N+1}$, et $x_i = a + ih$ pour tout $i \in [[0, N+1]]$ et on note par U_i une approximation de $u(x_i)$.

Pour tout $i \in [[1, N]]$ on approche $u''(x_i)$ en (1) par $\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}$. Ensuite en (2) et (3) on approche $u(a)$ par U_0 et $u'(b)$ par $\frac{U_{N+1} - U_N}{h}$.

a) Ecrire l'approximation de (3) proposée et exprimer U_{N+1} en fonction de U_N.

b) Ecrire un système algébrique linéaire d'inconnues $U_1, U_2, \cdots U_N$ qui approche le problème (1), (2) et (3). Ecrire ce système sous la forme matricielle $AU = b$ avec $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^N$ à préciser.

c) Montrer que A est une matrice symétrique et définie positive.

Exercice 2.

On se donne $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, un vecteur $b \in \mathbb{C}^n$ et on considère la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la première ligne est le vecteur ligne b^T et les lignes suivantes sont 0, c'est à dire

$$A_{1j} = b_j, \quad \forall\, j \in [[1, n]]$$

et

$$A_{ij} = 0, \quad \forall\, i \in [[2, n]], \quad j \in [[1, n]].$$

Pour simplifier, on suppose que tous les composantes du vecteur b sont non nulles, donc $b_j \neq 0$, $\forall\, j \in [[1, n]]$. On se donne aussi $p \in \mathbb{R}$ avec $p > 1$ et nous notons par $q > 1$ l'unique nombre tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On se propose de montrer que

$$\|A\|_p = \|b\|_q \tag{4}$$

ou $\|A\|_p$ désigne la norme matricielle de A subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|_p$

$$\text{(rappel} \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n, \quad \forall\, p \geq 1).$$

Nous admettons le résultat suivant:

$$|\langle u\,,\, v\rangle| \leq \|u\|_p\, \|v\|_q, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{C}^n.$$

Cette inégalité s'appelle "l'inégalité de Holder en $\mathbb{C}^n$".
On cherchera à montrer (4) en montrant la double inégalité.
a) On se propose ici de montrer l'inégalité "$\leq$" de (4). On considère alors $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ arbitraire avec $\|x\|_p = 1$.

a1) Montrer que le vecteur Ax est tel que

$$(Ax)_1 = \langle b, x \rangle \qquad \text{et} \qquad (Ax)_i = 0, \quad \forall\, i \in [[2, n]].$$

a2) Montrer qu'on a

$$\|Ax\|_p = |\langle b, x \rangle|.$$

et ensuite en utilisant l'inégalité de Holder en $\mathbb{C}^n$ montrer

$$\|Ax\|_p \leq \|b\|_q.$$

a3) En déduire l'inégalité

$$\|A\|_p \leq \|b\|_q.$$

b) On se propose ici de montrer l'inégalité "$\geq$" de (4). On introduit le vecteur $y \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$y_i = \frac{1}{\|b\|_q^{q-1}} |b_i|^{q-2}\, \overline{b_i}, \quad \forall\, i \in [[1, n]].$$

b1) Montrer que $\|y\|_p = 1$
Indication: montrer et utiliser le fait que $p(q-1) = q$.
b2) Montrer que $\|Ay\|_p = \|b\|_q$.
b3) En déduire le résultat souhaité.

Exercice 3.
On se donne $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et les nombres complexes $a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que chaque ligne de A (à partir de la deuxième ligne) s'obtient de la ligne précédente par permutations circulaires vers la droite. Une telle matrice s'appelle **matrice circulante**.
Pour tout nombre complexe z nous notons par V_z le vecteur colonne de $\mathbb{C}^n$ donné par $V_z = (1, z, z^2, \cdots z^{n-1})^T$.
Nous notons par U_n l'ensemble des racines complexes de l'unité

$$U_n = \{\omega \in \mathbb{C}, \quad \omega^n = 1\}.$$

Rappelons que U_n contient exactement n éléments et plus précisément on a

$$U_n = \{e^{2\pi k i/n}, \quad k = 0, 1, \cdots n-1\}.$$

a) Montrer que pour tout $\omega \in U_n$ le vecteur V_ω est un vecteur propre de la matrice A. Quelle est la valeur propre correspondante à ce vecteur propre?
b) **Application:** donner une valeur propre complexe non réelle et un vecteur propre associée à cette valeur propre, pour la matrice circulante suivante

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$