Polytech Lyon, MAM3A, 2023-2024

Analyse Numérique (AN)

Partiel 2 - 2023

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Soit $b \in \mathbb{R}^3$ donné par $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Utiliser l'algorithme de Gauss pour résoudre le système algébrique linéaire avec inconnue $x \in \mathbb{R}^3$

$$Ax = b. \tag{1}$$

b) Faire la décomposition (factorisation) $A = LU$ avec $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice triangulaire inférieure avec 1 sur la diagonale et $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice triangulaire supérieure.
c) Résoudre le système (1) en utilisant la décomposition de **b)**.
d) Montrer qu'il existe une factorisation $A = LD\tilde{U}$ avec L matrice triangulaire inférieure avec 1 sur la diagonale, $\tilde{U}$ matrice triangulaire supérieure avec 1 sur la diagonale et D matrice diagonale; trouver L, D et $\tilde{U}$.

Exercice 2.

On se donne les nombres $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Nous notons aussi $x_{i} = -x_i, \ \forall\, i \in [[1, n]]$. Nous avons donc au total $2n+1$ nombres réels distinctes que nous pouvons noter $\{x_k, \ k \in [[-n, n]]\}$.
On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est continue et paire (c'est à dire: $f(x) = f(-x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}$).
On considère P le polynome d'interpolation de Lagrange de f aux points $\{x_k, \ k \in [[-n, n]]\}$.
On se propose de montrer que P est un polynome pair.
On considère les polynomes fondamentaux de Lagrange aux points $\{x_k, \ k \in [[-n, n]]\}$:

$$L_k(x) = \prod_{j \in [[-n,n]], j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad \forall\, k \in [[-n, n]].$$

a) Supposons que P s'écrit sous la forme $P(x) = Q(x^2), \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ avec Q un polynome. Montrer que P est un polynome pair.
b) Montrer que L_0 s'écrit sous la forme

$$L_0(x) = C \prod_{j=1}^{n} (x^2 - x_j^2), \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

avec $C \in \mathbb{R}$ une constante à préciser (dépendant des $\{x_k, \ k \in [[-n, n]]\}$).
En déduire que L_0 est un polynome pair.
c) Montrer que pour tout $k \in [[1, n]]$ on a

$$L_k(x) = \frac{x}{x_k} \frac{x + x_k}{2x_k} \prod_{j \in [[1,n]], j \neq k} \frac{x^2 - x_j^2}{x_k^2 - x_j^2}$$

et

$$L_{-k}(x) = \frac{x}{x_k} \frac{x - x_k}{2x_k} \prod_{j \in [[1,n]], j \neq k} \frac{x^2 - x_j^2}{x_k^2 - x_j^2}.$$

d) Montrer que $L_k + L_{-k}$ est un polynome pair pour tout $k \in [[1, n]]$.
e) En déduire que P est un polynome pair.

Exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale strictement dominante. Rappelons la méthode itérative de **relaxation** pour résoudre un système algèbrique linéaire de matrice A; on considère la décomposition standard vue en cours:
$A = D - E - F$ on pose $M = \frac{1}{\omega} D - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F$ et la matrice de relaxation sera $B = M^{-1}N$. On suppose ici $\omega \in]0, 1]$ et on se propose de montrer que la méthode itérative de relaxation converge dans ce cas.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre arbitraire de B.
a) Montrer que la matrice $\frac{1-\omega-\lambda}{\omega} D + \lambda E + F$ n'est pas inversible et en déduire qu'il existe $i \in [[1, n]]$ tel que

$$\left| \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega} A_{ii} \right| \leq |\lambda| \sum_{j<i} |A_{ij}| + \sum_{j>i} |A_{ij}|.$$

b) Montrer l'inégalité

$$|\lambda| \leq \frac{(1-\omega)|A_{ii}| + \omega \sum_{j>i} |A_{ij}|}{|A_{ii}| - \omega \sum_{j<i} |A_{ij}|}$$

c) En déduire que $\rho(B) < 1$.