Polytech Lyon, MAM3A, 2023-2024

Analyse Numérique (AN)

Partiel 3 - 2023

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

Pour toute fonction continue $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ on note $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. On considère la formule de quadrature suivante pour approcher $I(f)$:

$$I_2(f) = \alpha[f(-\beta) + f(\beta)] + \gamma f(0) \tag{1}$$

avec $\alpha, \gamma \in \mathbb{R},\ \beta \in]0,1[$.

a) Trouver α, β, γ tels que la formule (1) soit d'ordre au moins 5.

b) Montrer que pour α, β, γ trouvés au point **a)** la formule (1) est d'ordre 5.

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = 1 + 2t - 2y(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

avec condition initiale

$$y(0) = 1. \tag{3}$$

a) Donner la solution exacte de ce problème de Cauchy (2) - (3).

b) Avec les notations du cours, on pose $h = \frac{1}{10}$ et $t_j = jh,\ j = 0, 1, 2, 3, \dots,$. En explicitant clairement tous les calculs, déterminer

(i) les approximations y_1 de $y(t_1)$ et y_2 de $y(t_2)$ obtenues par la méthode d'Euler explicite.

(ii) l'approximation y_1 de $y(t_1)$ obtenue par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2.

c) Calculer l'erreur d'approximation au point t_1 (c'est à dire $|y(t_1) - y_1|$) pour les deux méthodes numériques et comparer. Que remarque-t-on ?

Utiliser l'approximation $e^{-0.2} \simeq 0,8187$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $r \in \mathbb{R}$ un point fixe de f. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des approximations successives obtenue par le relation de récurrence:

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k), & k \in \mathbb{N} \\ x_0 \in \mathbb{R} & \text{donné.} \end{cases} \tag{4}$$

On se propose d'étudier la convergence de cette suite dans le cas critique $f'(r) = 1$. En fait on suppose que f admet le développement asymptotique suivant autour de r:

$$f(x) = x + b(x-r)^2 + (x-r)^2\alpha(x)$$

avec $b < 0$ et $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x\to r} \alpha(x) = 0$.

Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que si $x_0 \in]r, r+h[$ alors

a) $x_k \in]r, r+h[, \ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

b) La suite (x_k) est strictement décroissante.

c) $x_k \to r$ pour $k \to +\infty$.