Corrigé Partiel 2 - 1 AN 2024-2025

Exo 1.

a) La matrice du système est

$$S = S^{(1)} = \begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Etape 1.

Pas besoin d'échanger des lignes pivot $A_{11} = 1$ $\qquad \alpha_2^{(1)} = \frac{2}{1} = 2$

~~ligne 1 + (-1) ago~~

ligne 2 $\leftarrow$ ligne 2 $+ (-2)$ ligne 1 $\qquad \alpha_3^{(1)} = \frac{3}{1} = 3$

ligne 3 $\leftarrow$ ligne 3 $+(-3)$ ligne 1

$$S^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$ matrice système à la fin Etape 1

Etape 2. (la dernière)

pivot $(S^{(2)})_{22} = -1$

$$\alpha_3^{(2)} = \frac{-5}{-1} = 5$$

ligne 3 $\leftarrow$ ligne 3 $+ (-5)$ ligne 2

$$S^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 28 & 7 \end{pmatrix}$$

Le système équivalent au système initial s'écrit

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_2 - 7x_3 = -2 \\ 28x_3 = 7 \end{cases}$$

Ceci donne par une remontée

$$\begin{cases} x_3 = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \\ x_2 = 2 - 7\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ x_1 = 1 - 2\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Donc la solution est $x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

b) Nous avons $S^{(3)} = \left(A^{(3)} \quad b \right)$

et on pose $U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}$ matrice triangulaire supérieure.

Nous avons par la théorie

$$A = \underbrace{L^{(1)} L^{(2)}}_{=L} U = LU$$

avec $\cancel{L^{(1)} L^{(2)} =}$ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ Triang ~~sup~~ inf avec 1 sur la diagonale

Exercice 2.

a) $f(x) = f(y_0) + f(y_0, y_1)(x - y_0) + f(y_0, y_1, y_2)(x - y_0)(x - y_1)$

$f(y_0) = \sin(0) = 0$

$f(y_1) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$f(y_2) = \sin(3\pi) = 0$

$f(y_0, y_1) = \dfrac{0 + 1}{0 - \frac{\pi}{2}} = -\dfrac{2}{\pi}$

$f(y_1, y_2) = \dfrac{-1 - 0}{\frac{\pi}{2} - \pi} = \dfrac{2}{\pi}$

$f(y_0, y_1, y_2) = \dfrac{-\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}}{0 - \pi} = \dfrac{4}{\pi^2}$

donc

$f(x) = 0 - \frac{2}{\pi}(x - 0) + \frac{4}{\pi^2}(x - 0)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$f(x) = -\frac{2}{\pi} x + \frac{4}{\pi^2} x \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad P_2$

b) $f'(x) = 3\cos(3x)$

$f''(x) = -9\sin(3x)$

$f^{(3)}(x) = -27\cos(3x)$

$f^{(4)}(x) = 3^4 \sin(3x) = 3^4 f(x)$

par récurrence on montre

$f^{(4k)}(x) = 3^{4k} \sin(3x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$

alors

$f^{(4k+1)}(x) = 3^{4k+1} \cos(3x)$

$f^{(4k+2)}(x) = -3^{4k+2} \sin(3x)$

$f^{(4k+3)}(x) = -3^{4k+3} \cos(3x)$

donc $|f^{(n)}(x)| \leq 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, \pi]$

b2) Comme $x, x_i \in [0,\pi]$ alors $|x - x_i| \leq \pi$

Alors $|x-x_1| \cdot |x-x_2| \ldots |x-x_n| \leq \pi^{n+1}$ $\forall x \in [0,\pi]$

b3) Un resultat du cours nous dit

$$|E_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

avec $M_{n+1} = \max_{0 \leq y \leq \pi} \underbrace{|f^{(n+1)}(y)|}_{\leq 3^{n+1}}$

donc $M_{n+1} \leq 3^{n+1}$

D'autre part, de b2) $\Rightarrow$ $\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right| \leq \pi^{n+1}$

Alors

$$|E_n(x)| \leq \frac{3^{n+1}\pi^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(3\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$$

On sait que $\frac{(3\pi)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{\text{si } n \to \infty} 0$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3\pi)^{n+1}}{(n+1)!} = e^{3\pi}-1$

(car terme général de la serie

ce qui prove le résultat.

Exercice 3.

a) $A = M - N$ nous donne $M = A + N$

Alors $M_{ij} = \begin{cases} 2+\beta & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } |i-j|=1 \\ 0 & \text{si } |i-j|>1 \end{cases}$ $M = \begin{pmatrix} 2+\beta & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2+\beta \end{pmatrix}$

Il est facile de voir que M est à diagonale strictement dominante

car M_{ij} $\forall i=1\ldots n$ $|M_{ii}| = 2+\beta > \sum_{j\neq i}|M_{ij}| = \begin{cases} 1 & \text{si } i=1 \text{ ou } n \\ 2 & \text{si } i\in\{2..n-1\} \end{cases}$

b) $M^{-1}Nx = \lambda x$. On multiplie à gauche par M

$\Rightarrow Nx = \lambda Mx$. ; faire produit scalaire par $x \Rightarrow$

$\langle Nx, x\rangle = \lambda \langle Mx, x\rangle$

c) $\langle Nx, x\rangle = x^* N x = (\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)\begin{pmatrix} N_{11} x_1 \\ \vdots \\ N_{nn} x_n \end{pmatrix} =$

$= \sum_{i=1}^{n} N_{ii} x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} N_{ii} |x_i|^2$

$= \sum_{i=1}^{n} (\beta - \alpha_i) |x_i|^2 \in \mathbb{R}$

Alors

$|\langle Nx, x\rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} |\beta - \alpha_i| \, |x_i|^2 \leq \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\beta - \alpha_i| \, \|x\|^2$

d) $\langle Mx, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} x_j \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{M_{ii}}_{=2+\beta} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{M_{i,i+1}}_{=-1} \bar{x}_i x_{i+1}$

$+ \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{M_{i+1,i}}_{=-1} x_i \overline{x_{i+1}} = \cancel{\sum_{i=1}^{}} (2+\beta) \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i \overline{x_{i+1}} + \bar{x}_i x_{i+1})$

Mais $\overline{x_i \overline{x_{i+1}}} = \bar{x}_i x_{i+1}$ donc $x_i \overline{x_{i+1}} + \bar{x}_i x_{i+1} = 2 \mathrm{Re}(x_i \overline{x_{i+1}})$

Alors $\langle Mx, x\rangle = (2+\beta) \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Re}(x_i \overline{x_{i+1}})$

e) De d) $\Rightarrow \langle Mx, x\rangle = \beta \|x\|_2^2 + \underbrace{2 \|x\|_2^2}_{= 2|x_1|^2 + 2|x_2|^2 + \cdots 2|x_n|^2}$

$- 2 \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\mathrm{Re}(x_i \overline{x_{i+1}})}_{\leq |x_i| \cdot |x_{i+1}|}$

donc

$\langle Mx, x\rangle \geq \beta \|x\|_2^2 + \cancel{2|x_1|^2 + 2|x_2|^2 + \cdots + 2|x_n|^2}$

$+ |x_1|^2 + \underbrace{|x_1|^2 - 2|x_1||x_2| + |x_2|^2}_{\geq 0} + \underbrace{|x_2|^2 - 2|x_2||x_3| + |x_3|^2}_{\geq 0} + \cdots$ etc

donc $\geq \beta \|x\|_2^2$

f) De b) on déduit pour tout $\lambda \in Sp(M^{-1}N)$

$|\lambda| = \dfrac{|\langle Nx, x\rangle|}{|\langle Mx, x\rangle|} = \dfrac{|\langle Nx, x\rangle|}{\langle Mx, x\rangle} \leq \dfrac{\max_i |\beta - \alpha_i| \, \|x\|^2}{\beta \|x\|^2}$ de c) et e)

donc $|\lambda| \leq \dfrac{1}{\beta} \max_i |\beta - \alpha_i|$ OK ! car $\forall \lambda \in Sp(M^{-1}N)$

g) Il faut montrer : $\dfrac{|\beta - \alpha_i|}{\beta} < 1 \quad \forall i \iff |1 - \dfrac{\alpha_i}{\beta}| < 1 \quad \forall i \iff$

$\underbrace{-1 < 1 - \dfrac{\alpha_i}{\beta}}_{\text{toujours vraie}} < 1 \quad \forall i \iff \dfrac{\alpha_i}{\beta} < 2 \iff \dfrac{\alpha_i}{2} < \beta$

OK ! si $\beta > \dfrac{\alpha_i}{2} \quad \forall i = 1 \ldots n$.

$\iff \beta > \dfrac{\hat{\alpha}}{2}$