<u>Corrigé</u> Examen AN 2024 - 2025 Polytech MAM 3A

<u>Exo 1.</u>

a) Pour $g(x) = 1$

$1 = \alpha(1+1)$ donc $\alpha = \frac{1}{2}$

Pour $g(x) = x$

$\frac{1}{2} = \alpha\left(\frac{1}{2}+\beta+\frac{1}{2}-\beta\right) = \alpha$ (vrai car $\alpha = \frac{1}{2}$)

Pour $g(x) = x^2$

$\frac{1}{3} = \alpha\left[\left(\frac{1}{2}+\beta\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)^2\right]$ donc

$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\beta+\beta^2+\frac{1}{4}-\beta+\beta^2\right) \iff$

$\frac{2}{3} = \frac{1}{2}+2\beta^2 \iff 2\beta^2 = \frac{2}{3}-\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$\iff \beta^2 = \frac{1}{12} \iff \beta = \sqrt{\frac{1}{12}}$ (car $\beta > 0$)

$\beta = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Pour $g(x) = x^3$ donc

$\frac{1}{4} = \alpha\left[\left(\frac{1}{2}+\beta\right)^3+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)^3\right]$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}+3\cancel{\frac{1}{4}\beta}+3\frac{1}{2}\beta^2+\cancel{\beta^3}+\frac{1}{8}-3\cancel{\frac{1}{4}\beta}+3\frac{1}{2}\beta^2-\cancel{\beta^3}\right)$

$\iff \frac{1}{2} = \frac{1}{4}+3\beta^2 \iff \frac{1}{4} = 3\beta^2 \iff \frac{1}{12} = \beta^2$ vrai

Donc l'ordre de la formule est au moins 3

avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Pour montrer que la formule est d'ordre 3 il faut montrer ~~on doit montrer~~ que l'égalité est fausse pour $g(x) = x^4$: ~~on doit avoir~~ a-t-on : $\frac{1}{5} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^4+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^4\right]$;

On développe : $\frac{1}{5} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4+4\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{\sqrt{3}}{6}+6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^4\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{2}\right)^4-4\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{\sqrt{3}}{6}+6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2-4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^4\right] \iff$

$\frac{1}{5} = \frac{2}{2}\left[\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{144}\right] \iff \frac{1}{5} = \frac{9+18+1}{144} \iff \frac{1}{5} = \frac{28}{144}$ ce qui est faux !

donc ordre $= 3$.

b) $I(f) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\, dx$.

Nous introduisons pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la fonction

$\theta_i : [0,1] \longrightarrow [a_{i-1}, a_i]$ (bijection)

$\theta_i(t) = a_{i-1} + t(a_i - a_{i-1}) = a_{i-1} + th$

Alors

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\, dx = \int_0^1 g_i(t)(a_i - a_{i-1})\, dt = h \int_0^1 g_i(t)\, dt$$

avec $g_i = f \circ \theta_i$

$g_i(t) = f(a_{i-1} + t\, h)$

D'autre part, en suivant a) on a

$$\int_0^1 g_i(t)\, dt \sim \frac{1}{2} \left[g_i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + g_i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right]$$

Alors

$$\int_0^1 g_i(t)\, dt \sim \frac{1}{2}\left[f\left(a_{i-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h\right) + f\left(a_{i-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h\right)\right]$$

Donc une approximation par la formule composée de f sera

$$\int_a^b f(x)\, dx \sim \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(a_{i-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h\right) + f\left(a_{i-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h\right)\right]$$

Exercice 2.

a) En utilisant la formule de Duhamel on trouve

$$x(t) = e^{2t}(-1) + \int_0^t e^{2(t-s)}(s+1)\,ds \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Nous avons

$$\int_0^t e^{2(t-s)}(s+1)\,ds = \int_0^t \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{2(t-s)}}{-2}\right)(s+1)\,ds$$

intégration par parties

$$= -\frac{1}{2}(t+1) + \frac{1}{2}e^{2t}(0+1) + \int_0^t \underbrace{\frac{e^{2(t-s)}}{2}}_{=\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{2(t-s)}}{-4}\right)} \underbrace{\frac{d}{ds}(s+1)}_{=1}\,ds$$

$$= -\frac{1}{2}(t+1) + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2t}$$

Alors

$$\cancel{x(t) = \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}}$$

$$\int_0^t e^{2(t-s)}(s+1)\,ds = \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{3}{4} - \frac{t}{2}$$

Alors

$$x(t) = -\frac{1}{4}e^{2t} - \frac{3}{4} - \frac{t}{2}$$

b) (i) Méthode Euler explicite

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h f(t_n, x_n) \quad , \quad n = 0, 1 \cdots N-1 \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

On a posé $f(t, x) = 2x + t + 1$, $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$

Alors

$$x_1 = x_0 + hf(0, x_0) = -1 + [2(-1) + 0 + 1] \cdot 0.1$$

$$= -1 - 0.1 = -1.1$$

$$\cancel{x_2 = x_1}$$

$$\cancel{x_2 = x_1 + h f(h, x_1)}$$

$$\cancel{= -1.1 + 0.1\,[-2 \cdot 1.1 + 0.1 + 1] = -1.1 - 0.1 = -1.2}$$

$$\cancel{= -1.1 + 0.1\,[-1.1]}$$

(ii) Méthode de Runge-Kutta explicite d'ordre 2

$$\begin{cases} k_1 = \cancel{f(0,-1)}\ f(t_0, x_0) \\ k_2 = f\left(\cancel{\theta}\frac{h}{2},\ x_0 + \frac{h}{2} k_1\right) \\ x_1 = x_0 + h k_2 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} k_1 = f(0,-1) = \cancel{0}\ 2(-1) + 0 + 1 = -1 \\ k_2 = f\left(\frac{1}{20},\ -1 + \frac{1}{20}(-1)\right) = f\left(\frac{1}{20}, -\frac{21}{20}\right) = -\frac{42}{20} + \frac{1}{20} + 1 = -\frac{21}{20} \\ x_1 = -1 + \frac{1}{10}\left(-\frac{21}{20}\right) = -1 - \frac{21}{200} = -0.985 = -1,105 \end{cases}$$

$x_1 = -1,105$

Exo 3.

a) Comme $x_p > \alpha$ alors $f'(x_p) \neq 0$ donc x_{p+1} est bien défini

$$x_{p+1} - \alpha = x_p - \alpha - \frac{f(x_p)}{f'(x_p)} = \frac{-f'(x_p)(\alpha - x_p) - f(x_p)}{f'(x_p)} \underset{\text{dev. Taylor de } f \text{ en } \alpha \text{ autour de } x_p}{=}$$

$$= \frac{-\underbrace{f(\alpha)}_{=0} + \frac{1}{2} f''(c_p)(\alpha - x_p)^2}{f'(x_p)} = \frac{f''(c_p)(\alpha - x_p)^2}{f'(x_p)} \quad \text{car } f(\alpha) = 0$$

ce qui donne (5)

b) On utilise la récurrence : on veut montrer $\forall k \in \mathbb{N}$: ~~pour~~ x_k est ~~d~~ bien défini et $x_k > \alpha$, ~~$\forall k \in \mathbb{N}$~~

~~Proposition (P_k) :~~

~~On a : (P_0) vraie~~

(Initialisation) ~~(Hérédité)~~ : (P_0) est vraie car $x_0 > \alpha$

(Hérédité) : On suppose (P_k) vraie avec $k \in \mathbb{N}$ donc $x_k > \alpha$. On utilise a) avec $k = p$

~~On utilis~~

Alors x_{k+1} est bien définie et

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{(x_k - \alpha)^2}{2} \frac{f''(c_k)}{f'(x_k)} \quad \text{avec } \alpha < c_k < x_k$$

Par hypothèse $\dfrac{f''(c_k)}{f'(x_k)} > 0$.

On a aussi $(x_k - \alpha)^2 \geq 0$ donc $x_{k+1} - \alpha > 0 \Rightarrow$ donc $x_k > \alpha$

c) De (4) $\Rightarrow$ $x_{k+1} - x_k = -\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

par hypothèse $\Rightarrow$ $x_{k+1} - x_k < 0$ $\Rightarrow$ $x_k \searrow$

~~Alors~~ En plus $x_k > \alpha$ donc x_k borné inférieurement

Alors x_k est convergent et $x_k \to \ell$ avec $\ell \geq \alpha$

Montrons ~~$\ell > \alpha$~~. $\ell = \alpha$

On raisonne par absurd :

Si $\ell > \alpha$ on passe à la limite en (4) :

$\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$ donc $\dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)} = 0$ contradiction car $\ell > \alpha$ $f'(\ell) \neq 0$ et $f(\ell) \neq 0$.

Donc $x_k \to \alpha$.

d) Si $f'(\alpha) \neq 0$ alors l'ordre de convergence est au moins $= 2$ (vu en cours)

e) Par Théorème de Rolle entre 2 racines de f il existe au moins une racine de f' ~~on note~~ donc on a des racines de f' avec ~~$\beta_1 < \beta_2 < \dots \beta_{n-1}$~~ $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$

$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \alpha_3 \dots < \alpha_{n-1} < \beta_{n-1} < \alpha_n$.

(il n'y a pas d'autres racines de f' car il y a au maximum $n-1$ racines pour f')

En appliquant de nouveau le Théorème de Rolle pour f' on a $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_{n-2}$ des racines de f'' avec

$\beta_1 < \gamma_1 < \beta_2 < \gamma_2 < \beta_3 < \dots < \beta_{n-2} < \gamma_{n-2} < \beta_{n-1}$

(il n'y a pas d'autres racines de f'').

Alors

$f'(x) = n(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_{n-1})$

$f''(x) = n(n-1)(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\dots(x-\gamma_{n-2})$

On voit facilement
$f(x) > 0$ $\forall x > \alpha_n$
$f'(x) > 0$ $\forall x > \alpha_n$ car $x > \beta_{n-1}$
$f''(x) > 0$ $\forall x > \alpha_n$ car $x > \gamma_{n-2}$ et $\alpha_n > \beta_{n-1}$.

On a aussi $f'(\alpha_n) > 0$ car $f'(x) > 0$ pour $x > \beta_{n-1}$

Donc les hypoth. sur f sont satisfaites avec $\alpha = \alpha_n$. Alors ~~$x_k \to$~~ $x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \alpha_n$ avec ordre de convergence au moins 2.