Polytech Lyon, MAM3A, 2024-25

Analyse Numérique (AN)

Partiel 3

Durée 1h30 - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

a) Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \beta < \frac{1}{2}$ telle que la formule simple de quadrature

$$\int_0^1 g(x)\,dx \sim \alpha \left[g\left(\frac{1}{2} - \beta\right) + g\left(\frac{1}{2} + \beta\right) \right] \tag{1}$$

soit d'ordre au moins 2.
Montrer qu'en fait cette formule est d'ordre au moins 3.

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et posons

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

On considère la discrétisation suivante de $[a, b]$:

$$a_i = a + ih,\ i \in [[0, n]] \quad \text{avec} \quad h = \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{assez grand.}$$

Ecrire la formule composée pour approcher numériquement l'intégrale $I(f)$, formule qui correspond à la discrétisation $\{a_i,\ i = 0, \cdots n\}$ de $[a, b]$ et à la formule simple (1). Pour cela suivre la théorie vue en cours qui consiste à décomposer l'intégrale sur $[a, b]$ en une somme des intégrales sur des intervalles "petites" et écrire chacune de ces intégrales comme une intégrale sur l'intervalle $[0, 1]$ grâce à un changement des variables approprié; appliquer ensuite la formule de quadrature simple trouvée en **a)**.

Exercice 2.

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.
On considére le problème de Cauchy: trouver $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $x = x(t)$ satisfaisant l'EDO scalaire:

$$x' = 2x + t + 1, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

avec donnée initiale

$$x(0) = -1. \tag{3}$$

a) Donner la solution du problème (2) - (3).

b) On se propose de donner une approximation numérique de la solution de (2) - (3) sur l'intervalle $t \in [0, 1]$. On considère la discrétisation suivante de $[0, 1]$:

$$t_n = nh,\ n \in [[0, N]] \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad N \in \mathbb{N}^*.$$

On supposera dans la suite de l'exercice $N = 10$. Determiner l'approximation x_1 de $x(t_1)$ obtenue par:

(i) la méthode d'Euler explicite
(ii) la méthode de Runge-Kutta explicite d'ordre 2.

Exercice 3.
(*Convergence globale partielle; l'exercice qui suit est une généralisation du problème d'approximation numérique de la plus grande racine d'un polynôme.*)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que $\alpha \in \mathbb{R}$ est une racine de f (donc $f(\alpha) = 0$) qui a la propriété suivante: les trois fonctions f, f' et f'' sont toutes non nulles sur l'intervalle $]\alpha, +\infty[$ et ont le même signe sur cet intervalle (donc soit elles sont toutes les trois strictement positive, soit elles sont strictement négatives).
On considère la suite (x_k) réelles définie par la méthode récursive de Newton:

$$\begin{cases} x_0 \ > \ \alpha \quad \text{donné} \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4}$$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $x_p > \alpha$. Montrer que x_{p+1} est bien défini et qu'il existe c_p avec $\alpha < c_p < x_p$ tel que

$$x_{p+1} - \alpha = \frac{(x_p - \alpha)^2 f''(c_p)}{2f'(x_p)}. \tag{5}$$

Indication: utiliser un développement de Taylor de f en α autour de x_p.
b) Montrer par récurrence que la suite (x_k) est bien définie et qu'on a

$$x_k > \alpha, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

c) Montrer que la suite (x_k) est strictement décroissante et en déduire le résultat suivant:

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = \alpha.$$

d) Supposons qu'on a en plus $f'(\alpha) \neq 0$. Que peut-on dire de l'ordre de convergence de x_k vers α?
e) **Application** Supposons que f est un polynôme de degré n (avec $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$) de la forme

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

avec $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ (donc ce polynôme a n racines réelles distinctes). Montrer que toutes les hypothèses de l'exercice sont satisfaites avec $\alpha = \alpha_n$. Considérons une suite (x_k) donné par (4). Montrer que cette suite converge vers une limite à déterminer. Que peut-on dire de l'ordre de convergence de cette suite?