

Exo 1.

a) $\frac{U_1 - U_0}{h} = \alpha U_0$

ce qui donne

$U_1 - U_0 = \alpha h U_0$ donc

$U_1 = U_0(1 + \alpha h)$

Comme $1 + \alpha h > 0$ (car $\alpha, h > 0$) alors

(1)' $U_0 = \frac{1}{1 + \alpha h} U_1$

b) On approche (1) en x_i , $i = 1, \dots, N$

$-\frac{U_{i-1} - 2U_i - U_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$, $i = 1, \dots, N$

Pour $i = 1$ on a

$-U_0 + 2U_1 - U_2 = h^2 f(x_1)$

~~ce qui~~ et en utilisant (1)' on obtient

$\left(2 - \frac{1}{1 + \alpha h}\right) U_1 - U_2 = h^2 f(x_1)$

Pour i de 2 à $N-1$ on a

$-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1} = h^2 f(x_i)$

Pour $i = N$ on a (on utilise $U_{N+1} = 1$)

$-U_{N-1} + 2U_N - 1 = h^2 f(x_N)$

donc

$-U_{N-1} + 2U_N = h^2 f(x_N) + 1$

On a alors le système algébrique linéaire
N équations avec N inconnues : $U_1, U_2, \dots, U_N$.

$$\begin{cases} \left(2 - \frac{1}{1+\alpha h}\right) u_1 - u_2 = b_1 \\ -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = b_i, \quad i=2 \dots N-1 \\ -u_{N-1} + 2u_N = b_N \end{cases}$$

avec $\begin{cases} b_i = h^2 f(x_i), \quad i=1 \dots N-1 \\ b_N = h^2 f(x_N) + 1 \end{cases}$

On écrit ce système sous la forme matricielle

$AU = b$
avec $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{1+\alpha h} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} 2 - \frac{1}{1+\alpha h} & \text{si } i=j=1 \\ 2 & \text{si } i=j \neq 1 \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{si } |i-j| > 1 \end{cases}$$

c) Il est facile de voir que A est réel et symétrique.
Montrons que A est définie positive;

soit $y \in \mathbb{R}^N$ arbitraire, 0 alors

$$\begin{aligned} \langle Ay, y \rangle &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij} y_i y_j = \sum_{i=1}^N A_{ii} y_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} A_{ij} y_i y_j \\ &= \left(2 - \frac{1}{1+\alpha h}\right) y_1^2 + 2 \sum_{i=2}^N y_i^2 - 2y_1 y_2 - 2y_2 y_3 - \dots - 2y_{N-1} y_N \\ &= y_1^2 - 2y_1 y_2 + y_2^2 + y_2^2 - 2y_2 y_3 + y_3^2 + \dots + y_{N-1}^2 - 2y_{N-1} y_N + y_N^2 \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{1+\alpha h}\right) y_1^2 + y_N^2 \\ \text{Remarque: } 2 - \frac{1}{1+\alpha h} &= 1 + \left(1 - \frac{1}{1+\alpha h}\right) = 1 + \frac{\alpha h}{1+\alpha h} > 1 \end{aligned}$$

donc

$$\langle AY, Y \rangle = (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 + \dots + (y_{N-1} - y_N)^2 + \frac{dh}{1+h} y_1^2 + y_N^2$$

Il est évident que $\langle AY, Y \rangle \geq 0 \quad \forall Y \in \mathbb{R}^N$

D'autre part si $\langle AY, Y \rangle = 0$ alors

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 0 \\ y_2 - y_3 = 0 \\ \vdots \\ y_{N-1} - y_N = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_N = 0 \end{cases}$$

et ceci nous donne $Y = 0$
d'où le résultat

Exo 2.

$$a) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{On développe selon les colonnes de } 3^{\text{e}} \text{ à } n^{\text{e}} : \\ P_B(\lambda) = (1-\lambda)^{n-2} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^{n-2} ((1-\lambda)^2 - 1) \\ = (1-\lambda)^{n-2} (1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1) = (1-\lambda)^{n-2} (\lambda^2 - 2\lambda)$$

Alors $P_B(\lambda) = (1-\lambda)^{n-2} \lambda(\lambda-2)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

les racines de P_B sont : $\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = 2$

$$\text{Sp}(B) = \{0, 1, 2\}$$

Alors $\rho(B) = 2$

b) Soit $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$

à la valeur propre $\lambda = 2$.

$$Bv = 2v$$

$$\text{donc } \|Bv\| = 2\|v\|$$

$$\text{donc } 2\|v\| \leq \|B\| \cdot \|v\|$$

un vecteur propre associé

Alors

$$\|Bv\| \leq \|B\| \cdot \|v\| \quad \text{car } \|v\| > 0 \\ \Rightarrow \|B\| \geq 2$$

c) Par définition $\|B\|_u = 1$

Si $\|\cdot\|_u$ était une norme matricielle subordonnée alors
de b) on avait $\|B\|_u \geq 2$ donc $1 \geq 2$ contradiction
donc $\|\cdot\|_u$ n'est pas subordonnée.

Exo 3.

$$a) \|AB\|_t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |(AB)_{ij}| =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |A_{ik}| \cdot |B_{kj}|$$

D'autre part

$$\|A\|_t \|B\|_t = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |A_{ik}| \right) \left(\sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^n |B_{\ell j}| \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{ik}| |B_{\ell j}|$$

Remarquons que pour tout $(i, j) \in \{1, n\}^2$ on a

$$(2)' \quad \sum_{k=1}^n |A_{ik}| \cdot |B_{kj}| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n |A_{ik}| |B_{\ell j}|$$

(car les n termes à gauche sont parmi les n^2 termes à droite et on a que des termes ≥ 0)

On somme (2)' sur (i, j) et on obtient l'inégalité souhaitée

b) On prend $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$$(A_{ij} = B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases})$$

Alors $\|AB\|_t =$ Alors il est facile de voir que

$$AB = A = B.$$

On a: $\|A\|_t = \|B\|_t = \|AB\|_t = 1$

et l'inégalité

$$1 \leq \alpha \cdot 1 \cdot 1$$

est impossible avec $\alpha \in [0, 1]$