Polytech Lyon, MAM3A, 2025-2026

Analyse Numérique (AN)

Partiel 1

Durée 1h30 - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert borné dans $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On se donne aussi une fonction $f \in C(\bar{\Omega})$ et une constante $\alpha > 0$.

On considère l'̆quation différentielle suivante: trouver $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ satisfaisant

$$(1) \qquad -u''(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \Omega$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$(2) \qquad u'(a) = \alpha u(a)$$

et

$$(3) \qquad u(b) = 1$$

(la condition limite (2) est une condition de **Robin**).

Dans la suite de l'exercice on va utiliser la méthode et les notations du cours pour construire une approximation du problème (1) - (2) - (3). On fixe $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 3$ assez grand, on pose $h = \frac{b-a}{N+1}$, on pose $x_i = a + ih$ pour tout $i \in \{0, 1, \cdots N+1\}$ et on note par U_i une approximation de $u(x_i)$.

Pour tout $i = 1, 2, \cdots N$ on approche $u''(x_i)$ en (1) par $\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}$ et $u'(a)$ en (2) par $\frac{U_1 - U_0}{h}$. D'autre part, grâce à (3) nous prenons $U_{N+1} = 1$.

a) Ecrire une approximation de (2) comme une équation faisant intervenir U_0 et U_1 et exprimer U_0 en fonction de U_1.

b) Ecrire un système algébrique linéaire d'inconnues $U_1, U_2, \cdots U_N$ qui approche le problème (1) - (2) - (3). Ecrire ce système sous la forme matricielle $AU = b$ avec $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^N$ à préciser.

c) Montrer que A est une matrice symétrique et définie positive.

Exercice 2.

On considère $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et on munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme

$$\|A\|_u = \max_{(i,j) \in [[1,n]] \times [[1,n]]} |A_{ij}|, \quad \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

(on admet que cette expression définie une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

On se propose de montrer que cette norme matricielle n'est pas une norme subordonnée. Pour ceci on considère la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $i, j \in [[1, n]]$ on a

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \quad \text{ou} \quad (i,j) = (1,2) \quad \text{ou} \quad (i,j) = (2,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(cette matrice va servir de contre-exemple).

a) En calculant les valeurs propres de B montrer que $\rho(B) = 2$, où $\rho(B)$ désigne le rayon spectral de la matrice B.

b) Soit $\|\cdot\|$ une norme arbitraire sur $\mathbb{C}^n$ et notons aussi par $\|\cdot\|$ la norme matricielle subordonnée à cette norme vectorielle. Montrer qu'on a

$$\|B\| \geq 2$$

(*Indication: utiliser la définition de* $\|B\|$).

c) Calculer $\|B\|_u$ et en déduire que $\|\cdot\|_u$ n'est pas une norme matricielle subordonnée.

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire et munissons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme

$$\|A\|_t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

(on admet que cette expression définie une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

a) Montrer qu'on a

$$\|AB\|_t \leq \|A\|_t \|B\|_t, \quad \forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

b) Montrer que ce résultat n'est pas améliorable, au sens suivant: il n'existe pas $\alpha \in [0, 1[$ tel que

$$\|AB\|_t \leq \alpha \|A\|_t \|B\|_t, \quad \forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(*Indication: donner un contre-exemple.*)