Corrigé Examen MMJ en MAM3A, 2018 - 2019

Exo 1.

a) les fonctions $f$ et $g$ sont bornée donc $f, g \in \mathcal{L}_a$.

b) $f(x) = \frac{1}{2} H(x) - \frac{1}{2}\cos(2x) H(x)$

Alors pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $s > 0$ on a

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4} = \frac{s^2+4-s^2}{2s(s^2+4)} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

$$\mathcal{L}(g)(s) = \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) e^{-st} ds = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2} e^{-st} ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-st} dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2t) e^{-st} ds$$

On a :

$$(1)' \quad \int_0^{2\pi} e^{-st} dt = -\left[\frac{1}{s} e^{-st}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = -\frac{1}{s}\left(e^{-2\pi s} - 1\right) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-2\pi s}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(2t) e^{-st} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{t(2i-s)} dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-t(2i+s)} dt = \frac{1}{2(2i-s)}\left[e^{2\pi(2i-s)} - 1\right]$$

$$- \frac{1}{2(2i+s)}\left[e^{-2\pi(2i+s)} - 1\right] = \frac{1}{2(2i-s)}\left(e^{4\pi i} e^{-2\pi s} - 1\right)$$

$$- \frac{1}{2(2i+s)}\left(e^{-4\pi i} e^{-2\pi s} - 1\right) = \frac{1}{2(2i-s)}\left(e^{-2\pi s} - 1\right) - \frac{1}{2(2i+s)}\left(e^{-2\pi s} - 1\right)$$

(car $e^{\pm 4\pi i} = 1$)

Alors

$$\int_0^{2\pi} \cos(2t) e^{-st} dt = \left(e^{-2\pi s} - 1\right)\left(\frac{-1}{2(s-2i)} - \frac{1}{2(s+2i)}\right) = \frac{1 - e^{-2\pi s}}{2}\frac{2s}{s^2+4}$$

donc

$$(2)' \quad \int_0^{2\pi} \cos(2t) e^{-st} dt = \left(1 - e^{-2\pi s}\right)\frac{s}{s^2+4}$$

De $(1)'$ et $(2)'$ on

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1 - e^{-2\pi s}}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{1 - e^{-2\pi s}}{2}\frac{s^2+4-s^2}{s(s^2+4)} \text{ donc}$$

$$\mathcal{L}(g)(s) = \left(1 - e^{-2\pi s}\right)\frac{2}{s(s^2+4)}$$

On a bien $\mathcal{L}(g)(s) = \left(1 - e^{-2\pi s}\right)\mathcal{L}(f)(s)$, $\forall s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 0$

Exo 2.

On prolonge toutes les fonctions par 0 pour $t < 0$

On pose $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$

En appliquant $\mathcal{L}$ on trouve

$$s^2 Y(s) - s - 2 + 4\left[sY(s) - 1\right] + 13\,Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2}$$

Ceci donne

$$Y(s)\,(\underbrace{s^2+4s+13}_{=(s+2)^2+9}) = s+2+4 + \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

donc

$$Y(s) = \frac{4}{(s+2)^2+9} + \frac{s+2}{(s+2)^2+9} + \frac{s+2}{\left[(s+2)^2+9\right]^2}$$

Nous avons

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(s+2)^2+9}\right) = \frac{4}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right) = \frac{4}{3}\, e^{-2t}\sin(3t)\,H(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right) = e^{-2t}\cos(3t)\,H(t)$$

D'autre part

$$\frac{s+2}{\left[(s+2)^2+9\right]^2} = \frac{d}{ds}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(s+2)^2+9}\right] = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\left[\frac{1}{3}\, e^{-2t}\sin(3t)\,H(t)\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\,\mathcal{L}\left[-t\, e^{-2t}\sin(3t)\,H(t)\right] = \frac{1}{6}\,\mathcal{L}\left[t\, e^{-2t}\sin(3t)\,H(t)\right]$$

donc

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{\left[(s+2)^2+9\right]^2}\right) = \frac{t}{6}\, e^{-2t}\sin(3t)\,H(t)$$

Alors

$$y(t) = \frac{4}{3}\, e^{-2t}\sin(3t) + e^{-2t}\cos(3t) + \frac{t}{6}\, e^{-2t}\sin(3t)$$

<u>Exo 3.</u>

a) On pose $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto u(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$u$ est continue donc $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Alors l'application est bien définie et c'est une distribution : la distribution régulière associée à $u$, $T_u$.

b) Il s'agit de la distribution

$$\delta_2 + 3\,\delta_4'$$

c) On note $T_3 : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi \longrightarrow \langle T_3, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x)\,dx$$

~~Comme~~ Soit $K \subset \mathbb{R}$ compact tel que $\varphi = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus K$

Alors

$$\langle T_3, \varphi \rangle = \int_K \varphi^2(x)\,dx$$

Comme $\varphi^2$ est continue alors $\varphi^2$ est bornée sur le borné $K$

donc $\varphi^2$ est intégrable sur $K$

$T_3$ est bien définie

Montrons que $T_3$ n'est pas linéaire

~~$T_3, 2\varphi$~~ On ~~pose~~ considère $\theta_1$ vue en cours, $\theta_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_3, 2\theta_1 \rangle = \int_{\mathbb{R}} 4\,\theta_1^2(x)\,dx = 4 \int_{\mathbb{R}} \theta_1^2(x)\,dx$$

$$2 \langle T_3, \theta_1 \rangle = 2 \int_{\mathbb{R}} \theta_1^2(x)\,dx$$

Mais $\int_{\mathbb{R}} \theta_1^2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \theta_1^2(x)\,dx > 0$ car $\theta_1 > 0$ sur $]-1, 1[$

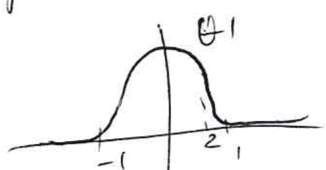
donc $\langle T_3, 2\theta_1 \rangle \neq 2 \langle T_3, \theta_1 \rangle$

donc $T_3$ n'est pas une distribution

d) On pose $T_4 : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi \longrightarrow \langle T_4, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{k}\right)$$

On va montrer que $T_4$ n'est pas définie, en montrant ~~en~~ que $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_1\left(\frac{1}{k}\right) = +\infty$




si $k \geq 2$ alors $0 < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$

donc $\theta_1\left(\frac{1}{k}\right) \geq \theta_1\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ (car $\theta_1$ décroissante strictement sur $]0, 1[$

Alors ~~$\sum \varphi$~~ $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_1\left(\frac{1}{k}\right) = \underbrace{\theta_1(1)}_{=0} + \sum_{k=2}^{\infty} \theta_1\left(\frac{1}{k}\right) \geq$

$$\geq \underbrace{\theta_1\left(\frac{1}{2}\right)}_{>0} \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} 1}_{=+\infty} = +\infty$$

donc $T_4$ n'est pas bien définie

## Exo 4.

a) De (2) $\Rightarrow$

$$u' = \alpha e^{\alpha x}.T_1 - \alpha e^{-\alpha x}.T_2 + e^{\alpha x}.T_1' + e^{-\alpha x}.T_2'$$

$$= \alpha e^{\alpha x}.T_1 - \alpha e^{-\alpha x}.T_2$$ grâce au (3)

ensuite

$$u'' = \alpha^2 e^{\alpha x}.T_1 + \alpha^2 e^{-\alpha x}.T_2 + \alpha e^{\alpha x}.T_1' - \alpha e^{-\alpha x}.T_2'$$

$$= \alpha^2 u + \delta$$ grâce au (2) et (4)

Donc $u$ est bien une solution de (1)

b) De (3) $\Rightarrow$ $e^{\alpha x}.T_1' = -e^{-\alpha x} T_2'$

et on remplace en (4) $\Rightarrow$

$$-2\alpha e^{-\alpha x}.T_2' = \delta$$

En multipliant par $e^{\alpha x}$ ceci donne

$$T_2' = -\frac{1}{2\alpha} e^{\alpha x}.\delta = -\frac{1}{2\alpha}\delta$$

On peut prendre

$$T_2 = -\frac{1}{2\alpha} H$$

(en fait $T_2 = -\frac{1}{2\alpha} T_H$) distrib régulière associée à $H$

Alors

$$T_1' = -e^{-2\alpha x}.T_2' = -e^{-2\alpha x}\left(-\frac{1}{2\alpha}\right).\delta$$

$$= \frac{e^{-2\alpha x}}{2\alpha}.\delta = \frac{1}{2\alpha}\delta$$

On peut prendre

$$T_1 = \frac{1}{2\alpha} H$$

Alors on a une solution

$$u = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha x}.H - \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x}.H$$ distribution régulière

donc

$$u = \frac{1}{\alpha}\, sh(\alpha x)\, H(x)$$

Exo 5 :

Pour ~~tout~~ $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ arbitraire on :

$$\langle T_p, \varphi \rangle = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p-1} \varphi\left(\frac{j}{p}\right) \xrightarrow{p \to \infty} \int_\Omega \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

(somme de Riemann car $\varphi$ continue)

Alors

$T_p \longrightarrow 1$ pour $p \to \infty$ au sense $\mathcal{D}'(\Omega)$.