Corrigé Partiel 1, MMI. 2018-2019

Exo 1.

a) Nous savons que
$$\lim_{x \to \infty} x^3 e^{-x} = 0 \qquad \left(\text{car } = \frac{x^3}{e^x} \xrightarrow{x \to \infty} 0\right)$$

Alors il existe $M > 1$ tel que
$$x^3 e^{-x} \leq 1 \quad \text{si } x \geq M.$$

On écrit $[1, \infty[= [1, M] \cup]M, +\infty[$.

Sur $[1, M]$ la fonction f_1 est intégrable Lebesgue (i.L) car continue sur un compact ~~ou borné~~ (ou bornée sur un ensemble borné)

Sur $]M, +\infty[$ on a $\forall x > M$
$$|f_1(x)| = x^3 e^{-x} e^{-x} \leq e^{-x}$$
comme la fonction $x \to e^{-x}$ est i.L sur $]M, \infty[$ alors c'est pareil pour f_1.

Donc f_1 est i.L sur $[1, \infty[$

b) La fonction f_2 se prolonge par continuité en 0

car
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(3x)}{x(x+2)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\to 1} \underbrace{\frac{3}{(x+2)}}_{\to 2} = \frac{3}{2}$$

On considère alors la fonction
$$\hat{f_2} : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad : \quad \hat{f_2}(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{si } x \in]0, 1] \\ \frac{3}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\hat{f_2}$ est continue sur le compact $[0, 1]$ donc $\hat{f_2}$ est i.L sur $[0, 1]$ donc sur $]0, 1[$. Donc f_2 est i.L.

Exercice 2.

a) • Si $x \in [0, 1[$ alors $x^n \to 0$ si $n \to \infty$

Alors $f_n(x) \to \frac{1}{e^x} = e^{-x}$.

• Si $x = 1$ alors $x^n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donc
$$f_n(x) = 1 \text{ (ou } \to \text{)} \quad \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e}$$

. Si $x > 1$ alors $x^n \longrightarrow \infty$ si $n \longrightarrow \infty$

donc $f_n(x) \longrightarrow 0$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ avec

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{1+e} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Comme $x^n \geq 0$ alors $x^n + e^x \geq e^x$ donc

$f_n(x) \leq \frac{1}{e^x}$. $\forall x \geq 0$

donc c'est OK avec $g(x) = e^{-x}$

Comme g est i.L sur $[0, \infty[$ alors (car $|f_n| = f_n$)

f_n est i.L sur $[0, \infty[$ $f_n \geq 0$

c) On peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. ~~On a avec~~ Alors $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$

et $\int_0^\infty f_n(x)dx \longrightarrow \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 =$

$= 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$

Exo 3.

a) $f(y) = f(y) \cdot 1$ (utiliser Cauchy-Schwarz avec $\varphi = f$ et $\psi = 1$)

La fonction 1 ~~est~~ $1^2 = 1$ est i.L sur $[a, x)$ (car bornée sur ensemble borné) donc

$\psi = 1$ est dans $L^2([a, x))$ donc

$\varphi = f \in L^2([0, x))$ (car $f \in L^2(I)$)

$f \in$ ~~$L^2([0,x))$~~ $L^1([0, x))$

b) $g(u)-g(v) = \int_a^{u} f(y)\,dy - \int_a^v f(y)\,dy =$

$$= \begin{cases} \int_u^v f(y)\,dy & \text{si } u \le v \\ \int_v^u f(y)\,dy & \text{si } u > v \end{cases}$$

Montrons le resultat dans le cas $u \le v$ et la preuve est la même dans le cas $u > v$.

On utilise de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $\varphi = f$ ~~et $\psi = 1$~~ $\in L^2([a,v])$ et $\psi = 1 \in L^2([u,v])$

Alors $f \in L^1([u,v])$ et on a

$$\left| \int_u^v f(y)\,dy \right| \le \int_u^v |f(y)|\,dy = \int_u^v |f(y)| \cdot 1\,dy \le$$

$$\le \underbrace{\sqrt{\int_a^v |f(y)|^2\,dy}}_{\le \|f\|_{L^2(I)}} \cdot \sqrt{\underbrace{\int_u^v 1\,dy}_{= v-u}}$$

donc

$$|g(u) - g(v)| \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{|u-v|}$$

c'est ok avec $C = \|f\|_{L^2(\Omega)}$