Corrigé Partiel 2 ~~MAM3~~ MMJ en MAM3A 2018-2019

Exo 1.

a) $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$; $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -u \sin t \\ u \cos t \\ a \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} a \sin t \\ -a \cos t \\ u\cos^2 t + u \sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sin t \\ -a \cos t \\ u \end{pmatrix}$$

Alors $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + u^2} = \sqrt{a^2+u^2}$

b) On a : $\sqrt{a^2+u^2} > 0$ $\forall (u,t) \in \bar{D}$ donc ~~φ est~~ tous les points de D sont réguliers, donc φ est régulière.

c) $\int_\varphi V(x)\, d\sigma = \iint_D V(\varphi(u,t)) \left\| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)(u,t) \right\| du\, dt = \iint_D a\, u\, t \cos t \sqrt{a^2+u^2}\, du\, dt$

~~$= \iint_D a u^2 \sin t \cos t \sqrt{a^2+u^2}\, du\, dt$~~

On utilise la formule de Foubini en intégrant d'abord en t et ensuite en u.

$$\int_\varphi V(x)\, d\sigma = \int_0^1 a\, u \sqrt{a^2+u^2} \left(\int_0^{2\pi} t \cos t\, dt \right) du.$$

~~Comme $\int_0^{2\pi} \sin t \cos t\, dt = 0$ on déduit $\int_\varphi V(x)\, d\sigma = 0$.~~

On a

$$\int_0^{2\pi} t \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} t (\sin t)'\, dt = [t \sin t]_0^{2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin t}_{=0} = 0 - 0 = 0.$$

Alors

$$\int_\varphi V(x)\, d\sigma = 0$$

d1) La paramétrisation γ est

$([0,1], \gamma)$ avec $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

~~$\varphi(t) = (\ \ ) - \varphi(t)$~~

$$\gamma(u) = \varphi(u, \pi) = \begin{pmatrix} -u \\ 0 \\ +a\pi \end{pmatrix}, \quad \forall u \in [0,1]$$

c'est la paramétrisation d'un segment qui unit $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a\pi \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a\pi \end{pmatrix}$ parallèle à l'axe Ox : (c'est sur la droite $\{y=0\} \cap \{z = a\pi\}$)

d2) $F(x,y,z) = \nabla V(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$; $\gamma'(u) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\int_\gamma F(x) \cdot dx = \int_0^1 F(\gamma(u)) \cdot \gamma'(u)\, du =$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} a\pi \\ 0 \\ -u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} du = \int_0^1 (-a\pi) = -a\pi.$$

Exo 2.

a) On observe :

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \gamma_3^2(t) = a^2 \cos^2 t + b^2 \cos^2(3t) + 2ab \cos t \cos(3t)$$
$$- 2ab \sin t \sin(3t) + 4ab \sin^2(2t)$$
$$+ a^2 \sin^2 t + b^2 \sin^2(3t) +$$
$$= a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + b^2 (\cos^2(3t) + \sin^2(3t)) + 4ab\, \frac{1-\cos(4t)}{2}$$
$$+ 2ab \underbrace{(\cos t \cos(3t) - \sin t \sin(3t))}_{= \cos(4t)}$$
$$+ 2ab - 2ab \cos(4t)$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab \cos(4t)$$

donc

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \gamma_3^2(t) = (a+b)^2$$

Donc la courbe support de γ se trouve sur la sphère de centre $(0,0,0)$ et rayon $\underline{a+b}$.

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t + 3b \sin(3t) \\ a \cos t - 3b \cos(3t) \\ 4\sqrt{ab} \cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \left[a \sin t + 3b \sin(3t)\right]^2 + \left[a \cos t - 3b \cos(3t)\right]^2 +$$
$$+ 16 ab \cos^2(2t) =$$
$$= a^2 \sin^2 t + 9b^2 \sin^2(3t) + 6ab \sin t \sin(3t) +$$
$$+ 16ab \cos^2(2t)$$
$$+ a^2 \cos^2 t + 9b^2 \cos^2(3t) - 6ab \cos t \cos(3t)$$

$$= a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + 9b^2\left[\sin^2(3t) + \cos^2(3t)\right] - \quad + 16ab \cos^2(2t) =$$
$$-6ab\left[\cos t \cos(3t) - \sin t \sin(3t)\right]$$
$$= a^2 + 9b^2 - 6ab \cos(4t) + 16ab \frac{1+\cos(4t)}{2} =$$
$$= a^2 + 9b^2 + 6ab + 2ab + 2ab\cos(4t) =$$
$$= (a+3b)^2 + 2ab\,\underbrace{\left[1 + \cos(4t)\right]}_{= 2\cos^2(2t)} = (a+3b)^2 + 4ab\cos^2(2t)$$

Alors

$$\|\gamma'(t)\|^2 \geq (a+3b)^2 > 0 \quad \forall\, t \in [0, 2\pi]$$

donc $\gamma'(t) \neq 0$

donc la paramelusation est régulière