Polytech Lyon, MAM3A, 2018-2019

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Examen - janvier 2019

Durée 2h - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ données par

$$f(t) = \sin^2(t)H(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

(où H désigne la fonction de Heaviside, $H = 1_{[0,+\infty[}$) et

$$g(t) = \begin{cases} \sin^2(t) & \text{si} \quad t \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [0, 2\pi] \end{cases}$$

a) Montrer que $f, g \in \mathcal{L}_a$.
b) Calculer $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$ et montrer qu'on a

$$\mathcal{L}(g)(s) = (1 - e^{-2\pi s})\mathcal{L}(f)(s), \quad \forall\, s \in \mathbb{C}, \text{ avec } Re(s) > 0.$$

Exercice 2.

Trouver la fonction $y \in C^2([0, +\infty[)$ avec $y, y', y'' \in \mathcal{L}_a$ solution de l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 13y = e^{-2t}\cos(3t), \quad \forall\, t \in [0, +\infty[$$

avec conditions initiales

$$\begin{cases} y(0) & = 1 \\ y'(0) & = 2. \end{cases}$$

Exercice 3.

Pour chacune des applications suivantes de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, précisez (en justifiant) si elles sont bien définies et si elles sont des distributions:

a) $\varphi \;\to\; \int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)\varphi(x)\, dx$

b) $\varphi \;\to\; \varphi(2) - 3\varphi'(4)$

c) $\varphi \;\to\; \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x)\, dx$

d) $\varphi \;\to\; \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{k}\right)$.

Exercice 4.

On se donne $\alpha > 0$ et une distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et on considère l'équation différentielle suivante: trouver $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que

$$u'' - \alpha^2 u = S, \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{1}$$

On se propose de donner une solution de (1) en utilisant une adaptation aux distributions de la méthode de la variation des constantes.

On cherchera une solution de (1) sous la forme

$$u = e^{\alpha x} \cdot T_1 + e^{-\alpha x} \cdot T_2 \tag{2}$$

avec $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ à trouver convenablement.

a) Montrer que si T_1, T_2 sont tels que

$$e^{\alpha x} \cdot T_1' + e^{-\alpha x} \cdot T_2' = 0 \tag{3}$$

et

$$\alpha e^{\alpha x} \cdot T_1' - \alpha e^{-\alpha x} \cdot T_2' = S \tag{4}$$

alors la distribution u donnée par (2) est une solution de (1).

b) Application: donner une solution de (1) dans le cas $S = \delta$.

Exercice 5.

Soit $\Omega =]0, 1[$ et considérons la discrétisation suivante de Ω: on pose $p \in \mathbb{N}$ assez grand, $h = \frac{1}{p}$ et

$$x_j = \frac{j}{p}, \quad \forall\, j \in [[0, p]].$$

On considère pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ la distribution suivante dans $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$S_p = \frac{1}{p}\left(\delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \cdots \delta_{x_{p-1}}\right).$$

Montrer que S_p admet une distribution limite $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pour $p \to +\infty$ et trouver cette distribution S.