Polytech Lyon, MAM3A, 2018 - 2019

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 1 - novembre - 2018

Durée 1h10 - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Remarque: *Toutes les intégrales qui apparaissent dans la suite doivent être considérées comme des intégrales de Lebesgue.*

Exercice 1.

a) Soit $f_1 : [1,\ +\infty[\ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_1(x) = x^3 e^{-2x}, \quad \forall x \geq 1.$$

Montrer que f_1 est intégrable Lebesgue.

a) Soit $f_2 :]0,\ 1]\ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_2(x) = \frac{\sin(3x)}{x(x+2)}, \quad \forall x \in\ ]0,1].$$

Montrer que f_2 est intégrable Lebesgue.

Exercice 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n : [0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n + e^x}, \quad \forall\ x \in [0, +\infty[.$$

a) Trouver une fonction $f : [0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall\ x \geq 0.$$

(*Indication: considérer 3 cas différents pour x*).

b) Trouver une fonction $g : [0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ intégrable Lebesgue telle que

$$f_n(x) \leq g(x), \quad \forall\ x \geq 0.$$

En déduire que f_n est intégrable Lebesgue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) En appliquant un théorème vu en cours montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx$ existe et trouver cette limite.

Exercice 3.

Soit $a \in \mathbb{R}$, l'intervalle $I = [a, +\infty[$ et une fonction $f \in L^2(I)$. On introduit la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ donnée par

$$g(x) = \int_a^x f(y)\,dy, \quad \forall\ x \geq a.$$

a) Montrer que la fonction g est bien définie (c'est à dire, montrer que f est intégrable Lebesgue sur l'intervalle $[a, x]$ pour tout $x \geq a$).
b) Montrer que g a la propriété suivante: il existe une constante $C \geq 0$ (à préciser) telle que

$$|g(u) - g(v)| \leq C\sqrt{|u - v|}, \quad \forall\, u, v \in I$$

(une fonction avec une telle propriété s'appelle fonction **Hölder - continue**).
Indication pour **a)** *et* **b)***: utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (rappel: si $\varphi, \psi \in L^2(I)$ alors $\varphi\psi \in L^1(I)$ avec en plus*

$$\int_I |\varphi(x)\psi(x)|\, dx \leq \sqrt{\int_I \varphi^2(x)\, dx}\, \sqrt{\int_I \psi^2(x)\, dx}.$$

)