Polytech Lyon, MAM3A, 2018-2019

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 2 - décembre 2018

Durée 1h et 10min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

On se donne $a > 0$ et on considère la nappe paramétrée $(\overline{D}, \varphi)$ avec $D =]0,1[\times]0,2\pi[$ et $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\varphi(u,t) = \begin{pmatrix} u \cos t \\ u \sin t \\ a\,t \end{pmatrix}, \quad \forall\,(u,t) \in \overline{D}.$$

(*la surface support de cette nappe paramétrée s'appelle un* **hélicoïde**; *remarquer qu'on peut voir cette surface comme une union des hélices de rayon u quand u varie de 0 à* 1).

On considère aussi une fonction à valeurs scalaires $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$V(x,y,z) = x\,z, \quad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

et le champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par $F = \nabla V$.

a) Calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Montrer que

$$\left\| \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big)(u,t) \right\| = \sqrt{a^2 + u^2}, \quad \forall\,(u,t) \in \overline{D}.$$

b) Trouver les points réguliers de φ et calculer, pour ces points réguliers, le vecteur normal ν à la nappe φ.

c) Calculer l'intégrale de surface de V sur φ, c'est à dire calculer $\int_\varphi V(x)\,d\sigma$.

d) On considère l'arc paramétré obtenu de φ en fixant $t = \pi$ et on notera γ cet arc paramétré.

d1) Quelle est la courbe support de γ?

d2) Calculer la circulation de F sur γ.

Exercice 2.

(couture de la balle de tennis)

Soient $a, b > 0$ fixées et considérons l'arc paramétré $([0,2\pi], \gamma)$ avec $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ où pour tout $t \in [0,2\pi]$ on a

$$\begin{cases} \gamma_1(t) &= a\cos t + b\cos(3t) \\ \gamma_2(t) &= a\sin t - b\sin(3t) \\ \gamma_3(t) &= 2\sqrt{a\,b}\sin(2t). \end{cases}$$

a) Montrer que la courbe support de γ se trouve sur une sphère en $\mathbb{R}^3$ de centre $(0,0,0)$ et de rayon à préciser.

b) Montrer qu'on a

$$\|\gamma'(t)\|^2 = (a+3b)^2 + 4ab\cos^2(2t), \quad \forall\, t \in [0, 2\pi]$$

et en déduire que la paramétrisation γ est régulière.

Indication pour **a)** *et* **b)***: utiliser la formule*

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$