Corrigé Examen MMI 2019-2020

Exercice 1.

a) On applique $\mathcal{L}$ à (1)

$$s^2 Y(s) - s\underbrace{Y(0+)}_{=1} - \underbrace{Y'(0^+)}_{=0} - 3\Big[s Y(s) - \underbrace{Y(0+)}_{=1}\Big] + 2Y(s) = \frac{1}{s-3}$$

donc

$$Y(s)\left(s^2 - 3s + 2\right) = s - 3 + \frac{1}{s-3} = \frac{(s-3)^2+1}{s-3} = \frac{s^2-6s+10}{s-3}$$

On obtient alors

$$Y(s) = \frac{s^2-6s+10}{(s^2-3s+2)(s-3)} = \frac{s^2-6s+10}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

b) $$\frac{s^2-6s+10}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s-2} + \frac{c}{s-3} \qquad (*)$$

On multiplie (*) par $s-1$ et prend $s=1$ ce qui donne

$$a = \frac{1^2-6\cdot 1+10}{(1-2)(1-3)} \quad \text{donc} \quad a = \frac{5}{2}$$

On multiplie (*) par $s-2$ et prend $s=2$ $\Rightarrow$

$$b = \frac{2^2-6\cdot 2+10}{(2-1)(2-3)} \quad \text{donc} \quad b = -2$$

On multiplie (*) par $s-3$ et prend $s=3$ $\Rightarrow$

$$c = \frac{3^2-6\cdot 3+10}{(3-1)(3-2)} \quad \text{donc} \quad c = \frac{1}{2}$$

c) De a) et b) on déduit

$$Y(s) = \frac{5}{2(s-1)} - \frac{2}{s-2} + \frac{1}{2(s-3)} \quad \text{donc}$$

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}\left(\left(\frac{5}{2}e^t - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}\right)H(t)\right)$$

ce qui donne pour $t \geq 0$:

$$y(t) = \frac{5}{2}e^t - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

Exercice 2.

a)

a1) Si $t \geq 1$ alors $H(t) = 1$ et $H(t-1) = 1$ donc $H(t) - H(t-1) = 0$

si $t < 0$ alors $H(t) = 0$ et $H(t-1) = 0$ donc $H(t) - H(t-1) = 0$

si $t \in [0, 1[$ alors $H(t) = 1$ et $H(t-1) = 0$ donc $H(t) - H(t-1) = 1$

Ceci donne le resultat

a2) On sait $H \in \mathcal{L}_a$ ~~et $\tau_1 H$~~ donc $\tau_1 H \in \mathcal{L}$ (resultat rappelé). Par linéarité $f \in \mathcal{L}_a$

$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(H)(s) - \mathcal{L}(\tau_1 H)(s) = \frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$

b)

b1) Si $t \geq 1$ alors $\varphi(t) = t$ et $\varphi(t-1) = t-1$ donc $\varphi(t) - \varphi(t-1) = 1$.

si $t < 0$ alors $\varphi(t) = 0$ et $\varphi(t-1) = 0$ donc $\varphi(t) - \varphi(t-1) = 0$

si $t \in [0, 1[$ alors $\varphi(t) = t$ et $\varphi(t-1) = 0$ donc $\varphi(t) - \varphi(t-1) = t$.

b2) ~~$\varphi = -H/_1$~~ $\varphi(t) = -(-t)H(t)$ donc $\varphi = \Phi - H/_1$

Comme $H \in \mathcal{L}_a \Rightarrow \varphi \in \mathcal{L}_a \Rightarrow \tau_1 \varphi \in \mathcal{L}_a \Rightarrow g \in \mathcal{L}_a$

$\mathcal{L}(\varphi)(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(H)(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$

$\mathcal{L}(\tau_1 \varphi)(s) = e^{-s}\frac{1}{s^2}$

Alors

$\mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(\varphi)(s) - \mathcal{L}(\tau_1 \varphi)(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2}$

$= \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s})$

Exercice 3.

a) Il s'agit de ~~la distr~~ T_u (distribution régulière associée à la fonction u avec $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$u(x) = 2 - x + x^2$

u est continue donc $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ donc OK!

T_u est bien une distribution sur $\mathbb{R}$

b) Il s'agit de la distribution $\delta_2 + 3\delta_4'$

c) La fonction

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{\sin x}{x^2} \quad \text{n'est pas } L^1_{loc}(\mathbb{R})$$

On va montrer en fait qu'il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x^2} \varphi(x)\, dx$ n'existe pas.

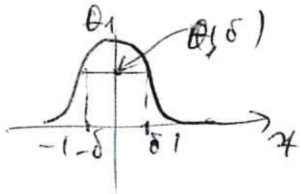
On prend $\varphi(x) = \theta_1(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & \text{si } x \in]-1,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(vue en cours)

On a : $\exists \delta > 0$ telle que $\forall x \in [-\delta, \delta]$ $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{1}{2}$ (car $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

on peut prendre $\delta < 1$

On a : $\theta_1(x) \geq \theta_1(\delta) > 0$, $\forall x \in [-\delta, \delta]$



Alors

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| |\varphi(x)|\, dx \geq \int_0^{\delta} \underbrace{\boxed{\left|\frac{\sin x}{x}\right|}}_{\geq \frac{1}{2}} \frac{1}{x} \underbrace{\theta_1(x)}_{\geq \theta_1(\delta)} dx$$

$$\geq \frac{1}{2} \theta_1(\delta) \underbrace{\int_0^{\delta} \frac{1}{x}\, dx}_{= +\infty} \geq +\infty$$

Donc l'application n'est pas bien définie,
ce n'est pas une distribution

Exercice 4.

a) u est une fonction continue par morceaux (elle est discontinue en 0 mais ~~u(0-) = 0 ; u(0+) = 1~~ $u(0+)$ et $u(0-)$ sont finies : $u(0+)=1$; $u(0-)=0$).
Alors $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ donc elle peut être vue comme une distribution sur $\mathbb{R}$ (penser à T_u).

b) Au sens $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on a :

$$u' = \cancel{ch'(\alpha}\ \frac{d}{dx} ch(\alpha x)\, H + ch(\alpha x) \underbrace{H'}_{=\delta}$$

(car la fonction $x \in \mathbb{R} \to ch(\alpha x)$ est C^∞)

Alors $u' = \alpha\, sh(\alpha x)\, H + \underbrace{ch(\alpha x)\,\delta}_{\substack{= \underbrace{ch(\alpha \cdot 0)}_{=1} \delta \\ = \delta}}$

donc

$$u' = \alpha\, sh(\alpha x) H + \delta$$

Comme la fonction $x \in \mathbb{R} \to sh(\alpha x)$ est C^∞ on a

$$u'' = \alpha \frac{d}{dx} sh(\alpha x)\ H + \alpha\, sh(\alpha x) \underbrace{H'}_{=\delta} + \delta'$$

$$= \alpha^2 ch(\alpha x) H + \underbrace{\alpha\, sh(\alpha x)\, \delta}_{\substack{= \alpha \underbrace{sh(\alpha 0)}_{=0} \delta \\ = 0}} + \delta'$$

donc

$$u'' = \alpha^2 \underbrace{ch(\alpha x) H}_{=u} + \delta'$$

donc

$$u'' - \alpha^2 u = \delta' \quad \text{au sens } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Exercice 5.

a) Il suffit de montrer : il existe $M>0$ tel que

$A\varphi(x)=0$ si $|x|>M$

On sait qu'il existe $M_1>0$ tel que

$\varphi(z)=0$ si $|z|>M_1$

On va prendre $M \geq M_1+b$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ avec $|x|>M$ et $y\in\mathbb{R}$ avec $|y|\leq b$ on a

~~$A\varphi(x)=\int_{-b}^{b}\theta(y)\varphi(x+y)\,dy$~~

~~$\varphi(x+y$~~ $|x+y|\geq |x|-|y| > M-b \geq M_1$

donc $|x+y|>M_1$

Alors $\varphi(x+y)=0$

Ceci donne $A\varphi(x)=\int_{-b}^{b}\theta(y)\underbrace{\varphi(x+y)}_{=0}\,dy=0$

b) Il est claire que $T*T_\theta$ est bien définie car

$T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $A_\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Il suffit de montrer la linéarité.

Pour tous $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ et $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$\langle T*T_\theta, \alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2\rangle = \langle T, A_{\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2}\rangle$

Il est facile de voir que

$A_{\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2} = \alpha_1 A_{\varphi_1}+\alpha_2 A_{\varphi_2}$

Alors

$\langle T, A_{\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2}\rangle = \langle T, \alpha_1 A_{\varphi_1}+\alpha_2 A_{\varphi_2}\rangle \overset{\text{car } T \text{ linéaire}}{=}$

$=\alpha_1\langle T, A_{\varphi_1}\rangle+\alpha_2\langle T, A_{\varphi_2}\rangle = \alpha_1\langle T*T_\theta,\varphi_1\rangle+$

$+\alpha_2\langle T*T_\theta,\varphi_2\rangle.$

c) Par (3) on a

$$\langle \delta * T_\theta, \varphi \rangle = \langle \delta, A_\varphi \rangle = A_\varphi(0) =$$

$$= \int_{-b}^{b} \theta(y)\,\varphi(0+y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \theta(y)\,\varphi(y)\,dy$$

(car $\theta = 0$ si $y \notin [-b, b]$)

$= \langle T_\theta, \varphi \rangle.$

Alors

$\delta * T_\theta = T_\theta.$

d) $\langle T_u * T_\theta, \varphi \rangle = \langle T_u, A_\varphi \rangle =$

$$= \int_{\mathbb{R}} u(x)\,A_\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) \int_{\mathbb{R}} \theta(y)\,\varphi(x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\theta(y)\,\varphi(x+y)\,dy\,dx$$

(chang. variable $z = x+y$, $dy = dz$, $y = z-x$)

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\theta(z-x)\,\varphi(z)\,dz\,dx =$$

inverser ordre integration

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\theta(z-x)\,\varphi(z)\,dx\,dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\theta(z-x)\,dx\right] \varphi(z)\,dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (u * \theta)(z)\,\varphi(z)\,dz = \langle T_{u*\theta}, \varphi \rangle.$$