Corrigé Partiel 1 "MMJ" 2019-2020

Exo 1.

a) $f_1(x) = g_1(x)\, e^{-x}$

avec $g_1(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{-2x}$.

Montrons que g_1 est bornée.

D'abord il est facile de voir que

$\lim_{x \to \infty} g_1(x) = 0$ (car $|g_1(x)| = g_1(x) \leq \frac{x^2}{e^{2x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$)

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$|g_1(x)| \leq 1$ si $x > \alpha$

Mais g_1 est continue sur $[0, \infty[$, donc sur $[0, \alpha]$ elle est bornée (Théorème de Weierstrass).

Alors il existe $\beta \geq 0$ t-q

$|g_1(x)| \leq \beta$, $\forall x \in [0, \alpha]$.

Donc finalement $|g_1(x)| \leq \max\{1, \beta\}$, $\forall x \geq 0$

Alors

$|f_1(x)| \leq \underbrace{\max\{1, \beta\}\, e^{-x}}$ fonction intégrable Lebesgue sur $[0, \infty[$

donc f_1 est intégrable Lebesgue sur $[0, \infty[$.

b) Nous avons

$|f_2(x)| \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in]0, 1]$ (car $x^2 \leq 1$ si $x \in]0, 1]$).

Comme la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable Lebesgue sur $]0, 1[$ alors f_2 est i.L sur $]0, 1]$.

Exo 2.

a) Si $x \in [0, 1[$ alors $x^n \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$

donc $f_n(x) \longrightarrow \sin(\pi x)$ si $n \longrightarrow \infty$

Si $x > 1$ alors $x^n \longrightarrow \infty$ si $n \longrightarrow \infty$

On a

$|f_n(x)| \leq \frac{1}{x^n + 1} \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$

donc $f_n(x) \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow +\infty$

On a alors
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. $\quad \forall x \in [0, \infty[- \{1\}$
donc pour presque tout $x \geq 0$.

b) Si $x \in [0,1]$ on utilise la majoration

$$|f_n(x)| \leq \frac{|\sin(\pi x)|}{x^n+1} \leq |\sin(\pi x)| = \sin \pi x$$

(car $x^n+1 \geq 1$ et $\sin(\pi x) \geq 0$ pour $x \in [0,1]$

Si $x > 1$ on utilise la majoration

$$|f_n(x)| \leq \frac{|\sin(\pi x)|}{x^n+1} \leq \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2}$$

(car $x^n \geq x^2$ si $x \geq 1$ et $n \geq 2$

Alors on peut prendre

$$g(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x \in [0,1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

g est i.L sur $[0,1]$ car ~~c~~ fonction continue sur un ensemble compact $[0,1]$

g est i.L sur $]1, \infty[$ (critère de Riemann)

Alors $g \geq 0$ et g est integrable Lebesgue sur $[0, +\infty[$.

c) On utilise le Théorème de Convergence Dominée de Lebesgue

De a) et b) les 2 hypothèses du Théorème sont verifiées. Alors f est i.L sur $[0, \infty[$ et

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

Exercice 3.

On observe qu'on a :

$$(1)' \quad 1_{\{x\in\mathbb{R}^n :\, f(x)\geq a\}}(y) \leq \frac{f(y)}{a}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

En effet :

- si $y \notin \{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\geq a\}$ alors
$$1_{\{x\in\mathbb{R}^n :\, f(x)\geq a\}}(y) = 0 \leq \frac{f(y)}{a}$$
(car $a>0$: $f(y)\geq 0$)

- si $y \in \{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\geq a\}$ alors $f(y)\geq a$ donc $\cancel{\frac{f(y)}{a}\geq 1}$
$$\frac{f(y)}{a} \geq 1 = 1_{\{x\in\mathbb{R}^n :\, f(x)\geq a\}}(y)$$

On intègre $(1)'$ pour $y\in\mathbb{R}^n$:

et comme
$$\int_{\mathbb{R}^n} 1_{\{x\in\mathbb{R}^n :\, f(x)\geq a\}}(y)\, d\lambda_n = \lambda_n(\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\geq a\})$$

on a
$$\lambda_n(\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\geq a\}) \leq \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda_n$$