Corrigé Partiel 2 MMI , MAM3A

Partie I.

I a) C'est le segment de droit ~~qui~~ en R^3 qui unit $(0,0,0)$ et $(\alpha,\beta,0)$

I b) C'est le cylindre dont l'axe est le segment ci-dessus et les deux cercles de base sont les cercles de rayon r dans les plans $E(0)$ et $E(1)$ respectivement

$$E(0)=\left\{ u\begin{pmatrix}\beta\\-\alpha\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad u,v\in R\right\}$$

$$E(1)=\left\{ \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}\beta\\-\alpha\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad u,v\in R\right\}$$

I c) On a

$$\varphi(\theta,t)=\begin{pmatrix}\alpha t\\\beta t\\0\end{pmatrix}+r\cos(\theta)\begin{pmatrix}\beta\\-\alpha\\0\end{pmatrix}+r\sin(\theta)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

donc

$$\varphi(\theta,t)=\begin{pmatrix}\alpha t+r\beta\cos\theta\\\beta t-r\alpha\cos\theta\\r\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\begin{pmatrix}-r\beta\sin\theta\\r\alpha\sin\theta\\r\cos\theta\end{pmatrix}\quad;\quad\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\begin{pmatrix}-r\beta\cos\theta\\r\alpha\cos\theta\\-r\underbrace{(\beta^2+\alpha^2)}_{=1}\sin\theta\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}-\beta\cos\theta\\\alpha\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix}$$

Alors $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|=r\sqrt{\underbrace{\beta^2\cos^2\theta+\alpha^2\cos^2\theta}_{=\cos^2\theta}+\sin^2\theta)}=r$

~~donc~~

I d) Comme $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|>0$ $\forall(\theta,t)\in\bar{D}$ alors φ est regulière et $\nu=\dfrac{\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|}=\begin{pmatrix}-\beta\cos\theta\\\alpha\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix}$

I c) $\int_\Psi v(m)\,d\sigma = \iint_D v(\varphi(\theta,t))\,\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| d\theta\,dt$

$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\alpha t + r\beta \cos\theta)(\beta t - r\alpha\cos\theta)\, r\, d\theta\, dt$

$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\alpha\beta t^2 + \cos\theta\,(r\beta^2 t - r\alpha^2 t) - r^2\alpha\beta\cos^2\theta\right] r\, d\theta\, dt$

$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \alpha\beta r t^2\, d\theta\, dt + \int_0^1 \underbrace{\int_0^{2\pi} r^2 t(\beta^2-\alpha^2)\cos\theta\, d\theta\, dt}_{=0}$

$- \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3\alpha\beta \underbrace{\cos^2\theta}_{=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}\, d\theta\, dr$

$= 2\pi\alpha\beta r \underbrace{\int_0^1 t^2\, dt}_{=\frac{1}{3}} + 0 + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^3 \alpha\beta\, d\theta\, dt$

$+ \frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{\int_0^{2\pi} r^3\alpha\beta\cos(2\theta)\, d\theta}_{=0}\, dt$

Donc

$\int_\Psi v(m)\,d\sigma = \frac{2\pi}{3}\alpha\beta r + \pi r^3 \alpha\beta$

Partie II.

II a) C'est le demi-cercle de centre $(0,0,0)$ et rayon 1 dans le plan (Oxy) (demi plan $y>0$)

II b) $\varphi(\theta,t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + r\cos(\theta) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + r\sin(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc

$\varphi(\theta,t) = \begin{pmatrix} \cos(t)(1+r\cos\theta) \\ \sin(t)(1+r\cos\theta) \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r\cos t \sin\theta \\ -r\sin t \sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\sin(t)(1+r\cos\theta) \\ \cos t\,(1+r\cos\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -r\cos(\theta)\cos(t)(1+r\cos\theta) \\ -r\cos(\theta)\sin(t)(1+r\cos\theta) \\ -r\cos^2 t \sin\theta(1+r\cos\theta) - r\sin^2 t \sin\theta(1+r\cos\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -r\cos(\theta)\cos(t)(1+r\cos\theta) \\ -r\cos(\theta)\sin(t)(1+r\cos\theta) \\ -r\sin(\theta)(1+r\cos\theta) \end{pmatrix} = -r(1+r\cos\theta)\begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(t) \\ \cos(\theta)\sin(t) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

On a

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| = r|1+r\cos\theta| \sqrt{\underbrace{\underbrace{\cos^2\theta\cos^2 t + \cos^2\theta \sin^2 t}_{=\cos^2\theta} + \sin^2\theta}_{=1}}$$

donc

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| = r|1+r\cos\theta|$$

On distingue 3 cas :

i) si $r<1$ alors $|r\cos\theta| \le r < 1$ donc $r\cos\theta > -1$

$\Rightarrow 1+r\cos\theta > 0 \quad \forall(\theta,t)\in D$

$\Rightarrow |1+r\cos\theta| = 1+r\cos\theta > 0$.

Donc tous les points $(\theta,t)\in\bar{D}$ sont reguliers

ii) si $r=1$ alors $|1+r\cos\theta| = |\underbrace{1+\cos\theta}_{\geq 0}| = \underbrace{1+\cos\theta}_{=0 \text{ si } \theta=\pi}$

Tous les points (θ,t) tels que $\theta\neq\pi$ sont reguliers

iii) si $r>1$ alors $|1+r\cos\theta| = 0 \Leftrightarrow$

$1+r\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{r} \Leftrightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{1}{r}\right)$ ou $\theta = 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{r}\right)$

Tous les points (θ,t) tels que $\theta \notin \left\{\arccos\left(-\frac{1}{r}\right), 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{r}\right)\right\}$ sont réguliers.

Pour les points réguliers on a alors $\nu = -\frac{1+r\cos\theta}{|1+r\cos\theta|}\begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(t)\\ \cos(\theta)\sin(t)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$

II c) Si $r<1$ alors $|1+r\cos\theta| = 1+r\cos\theta$

donc

$$\text{Aire}(S) = \int_{\Psi} 1\, d\sigma = \iint_{D} r(1+r\cos\theta)\, d\theta\, dt$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r\, d\theta\, dt + \underbrace{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\, d\theta\, dt}_{=0}, \text{ donc}$$

$$\text{Aire}(S) = 2\pi^2 r$$

II d) On a $([0,\pi], \Psi_1)$ $\qquad F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\\ x\\ 0\end{pmatrix}$

$\Psi_1 : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\Psi_1(t) = \Psi\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ r\end{pmatrix}$

c'est le demi-cercle de centre $\begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix}$ de rayon 1 dans le plan $z=r$.

Comme $F = \nabla V$ alors

$$\int_{\gamma_1} F(M)\cdot dM = V(\gamma_1(\pi)) - V(\gamma_1(0)) = V\begin{pmatrix}-1\\0\\r\end{pmatrix} - V\begin{pmatrix}1\\0\\r\end{pmatrix} =$$

$$(-1)\cdot 0 - 1\cdot 0 = 0.$$

On peut aussi utiliser la définition : $\int_{\gamma_1} F(M)\cdot dM =$

$$= \int_0^{\pi} \langle F(\Psi_1(t)), \Psi_1'(t)\rangle\, dt = \int_0^{\pi} \left\langle \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}\right\rangle dt =$$

$$= \int_0^{\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t)\, dt = \int_0^{\pi} \cos(2t)\, dt = \left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi} = 0.$$

II e) Nous avons

$$\cos^2 t(1+r\cos\theta)^2 + \sin^2 t(1+r\cos\theta)^2 = \alpha^2 \iff$$

$$(1+r\cos\theta)^2\underbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)}_{=1} = \alpha^2 \iff$$

$$1+r\cos\theta = \alpha \quad \text{ou} \quad 1+r\cos\theta = -\alpha$$

$(1+r\cos\theta)^2 = \alpha^2 \iff 1+r\cos\theta = \alpha$ ~~$\iff \cos\theta = \frac{\alpha-1}{r} \iff$~~

i) $1+r\cos\theta = \alpha \iff r\cos\theta = \alpha - 1$ $\quad \theta = 2\pi - \arccos\left(\frac{\alpha-1}{r}\right)$

$\theta = \arccos\left(\frac{\alpha-1}{r}\right)$ ou ~~$\arccos$~~ $\qquad$ si $\left|\frac{\alpha-1}{r}\right| > 1$

si $\left|\frac{\alpha-1}{r}\right| \leq 1$ $\qquad$ pas de solution

ii) $1+r\cos\theta = -\alpha \iff$ ~~$r\cos\theta$~~

$r\cos\theta = -\frac{(\alpha+1)}{r}$ $\quad$ si ~~$|\alpha+1|>r$~~ $\alpha+1 > r$ pas de solution

si $\alpha+1 \leq r$ alors $\theta = \arccos\left(-\frac{\alpha+1}{r}\right)$ ou 2π

$\theta = 2\pi - \arccos\left(-\frac{\alpha+1}{r}\right)$

i) $1+r\cos\theta = r \iff r\cos\theta = r-1 \iff \cos\theta = \frac{r-1}{r}$

On a au moins une solution $\iff \frac{|r-1|}{r} \leq 1 \iff |r-1| \leq r \iff$

$-r \leq r-1 \leq r$ ce qui donne $r \geq \frac{1}{2}$

Donc si $0 < r < \frac{1}{2}$ pas de solution

si $r \geq \frac{1}{2}$ on a deux solutions

$\theta = \arccos\left(\frac{r-1}{r}\right)$ ou $\theta = 2\pi - \arccos\left(\frac{r-1}{r}\right)$

ii) $1+r\cos\theta = -r \iff r\cos\theta = -r-1 \iff \cos\theta = -1-\frac{1}{r} < -1$

pas de solution dans ce cas.

Donc il y a deux solutions dans le cas $r \geq \frac{1}{2}$ (confondus si $r = \frac{1}{2}$) : $\theta = \theta_2 = 2\pi - \arccos\left(\frac{r-1}{r}\right)$ ou

$\theta = \theta_1 = \arccos\left(\frac{r-1}{r}\right)$

$\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = \frac{r-1}{r}$

$\sin\theta_1 = \sqrt{1-\cos^2\theta_1} = \sqrt{1-\left(\frac{r-1}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^2-(r-1)^2}}{r} = \frac{\sqrt{2r-1}}{r} \geq 0$ car $\theta_1 \in [0,\pi]$

$\sin\theta_2 = -\sqrt{1-\cos^2\theta_2} = -\frac{\sqrt{2r-1}}{r} \leq 0$ car $\theta_2 \in [\pi, 2\pi]$

Donc l'intersection souhaitée est l'union de 2 courbes

$([0,\pi], \tilde{\varphi}_1)$ et $([0,\pi], \tilde{\varphi}_2)$

$\tilde{\varphi}_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ $\qquad \tilde{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t\left(1+r\frac{r-1}{r}\right) \\ \sin t\left(1+r\frac{r-1}{r}\right) \\ r\frac{\sqrt{2r-1}}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ \sqrt{2r-1} \end{pmatrix}$

$\tilde{\varphi}_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ $\qquad \tilde{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ -\sqrt{2r-1} \end{pmatrix}$

(les 2 courbes sont confondues si $r = \frac{1}{2}$).