Polytech Lyon, MAM3A, 2019-2020

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI), Examen janvier 2020

Durée 2h - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Partout H *désigne la fonction de* **Heaviside**, $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $H = 1_{[0,+\infty[}$.

Exercice 1.

On se propose de trouver la fonction $y \in C^2([0, +\infty[)$ avec $y, y', y'' \in \mathcal{L}_a$, solution de l'équation différentielle

$$(1) \qquad y'' - 3y' + 2y = e^{3t}, \quad \forall\, t \in [0, +\infty[$$

avec conditions initiales

$$(2) \qquad \begin{cases} y(0) & = 1 \\ y'(0) & = 0. \end{cases}$$

Nous considérons que toutes les fonctions qui interviennent dans le problème se prolongent par 0 sur $]-\infty, 0[$.

a) On pose $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$ définie sur $\{s \in \mathbb{C},\ Re(s) > \xi_a(y)\}$. Montrer qu'on a

$$Y(s) = \frac{s^2 - 6s + 10}{(s-1)(s-2)(s-3)}, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}, \quad \text{avec } Re(s) > \xi_a(y).$$

b) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que

$$\frac{s^2 - 6s + 10}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s-2} + \frac{c}{s-3}, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}\backslash\{1, 2, 3\}.$$

c) Trouver la solution y de (1) - (2).

Exercice 2.

Rappel résultat vu dans un exercice en TD: si $b > 0$ et $f \in \mathcal{L}_a$ alors $\tau_b f \in \mathcal{L}_a$ et $\mathcal{L}(\tau_b f)(s) = e^{-bs}\mathcal{L}(f)(s)$, $\forall\, s \in \mathbb{C}$ avec $Re(s) > \xi_a(f)$, où $\tau_b f$ désigne la translation par b de f définie par $(\tau_b f)(t) = f(t - b)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

a) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = 1_{[0,1[}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a1) Montrer qu'on a

$$f = H - (\tau_1 H).$$

a2) En déduire que $f \in \mathcal{L}_a$ et calculer $\mathcal{L}(f)$.

b) On considère les fonctions $\varphi, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\varphi(t) = tH(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

et

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ t & \text{si} \quad t \in [0, 1[\\ 1 & \text{si} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

b1 Montrer que $g = \varphi - (\tau_1 \varphi)$.
b2 En déduire que $g \in \mathcal{L}_a$ et calculer $\mathcal{L}(g)$.

Exercice 3.
Pour chacune des applications suivantes de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, précisez (en justifiant) si elles sont bien définies et si elles sont des distributions:
a) $\varphi \;\to\; \int_{\mathbb{R}} (2 - x + x^2)\varphi(x)\, dx$
b) $\varphi \;\to\; \varphi(2) - 3\varphi'(4)$
c) $\varphi \;\to\; \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x^2}\varphi(x)\, dx$

Exercice 4.
On se donne $\alpha \in \mathbb{R}$ et la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(x) = ch(\alpha x)H(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Rappels fonctions "cosinus hyperboliques" et "sinus hyperboliques":

$$ch(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad sh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \quad ch'(y) = sh(y) \quad et \quad sh'(y) = ch(y).$$

a) Montrer que u peut être vue comme une distribution sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que u est solution de l'équation différentielle

$$u'' - \alpha^2 u = \delta', \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Exercice 5.
Soit $b > 0$ et $\theta \in L^1(\mathbb{R})$ telles que $\theta(x) = 0$ si $x \notin [-b, b]$.
Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on définit une fonction $A_\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$A_\varphi(x) = \int_{-b}^{b} \theta(y)\varphi(x + y)\, dy, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

On admet que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la fonction A_φ est bien définie et de classe C^∞.
a) Montrer que $A_\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on définit une nouvelle distribution appellée **convolution** *entre T et T_θ (où T_θ désigne la distribution régulière associée à θ), notée $T * T_\theta$, par l'égalité*

$$(3) \qquad < T * T_\theta\, , \varphi > = < T, A_\varphi >, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

b) Montrer que l'application $T * T_\theta$ de (3) est bien définie et est une distribution sur $\mathbb{R}$.
c) Qui est la distribution $\delta * T_\theta$?
d) Soit $u \in L^1(\mathbb{R})$ et $T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sa distribution régulière associée. Montrer qu'on a

$$T_u * T_\theta = T_{u*\theta}.$$