Polytech Lyon, MAM3A, 2019 - 2020

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 1 - octobre - 2019

Durée 1h10 - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Remarque: *Toutes les intégrales qui apparaissent dans la suite doivent être considérées comme des intégrales de Lebesgue.*

Exercice 1.

a) Soit $f_1 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_1(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{-3x}, \quad \forall x \geq 0.$$

Montrer que f_1 est intégrable Lebesgue.

b) Soit $f_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_2(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{x}}, \quad \forall x > 0.$$

Montrer que f_2 est intégrable Lebesgue sur $]0, 1]$. Est-elle intégrable Lebesgue sur $[1, +\infty[$? Justification.

Exercice 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ on considère la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^n + 1}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

a) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Montrer qu'on a

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{pour presque tout } x \geq 0.$$

b) Trouver une fonction $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ intégrable Lebesgue telle que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall\, x \geq 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

En déduire que f_n est intégrable Lebesgue pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

c) En appliquant un théorème vu en cours montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx$ existe et trouver cette limite.

Exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec $f \geq 0$ et f intégrable Lebesgue.
Montrer que pour tout $a > 0$ on a

$$\lambda_n\left(\{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_n.$$

Indication: majorer la fonction indicatrice de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \geq a\}$ *par une fonction appropriée.*