Polytech Lyon, MAM3A, 2019 - 2020

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 2 - novembre - 2019

Durée 1h10 - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Problème

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de répère $(Oxyz)$ on se donne l'arc paramétré de classe C^1 suivant: $([a,b],\gamma)$ avec $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall\, t \in [a,b]$$

avec $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1. Nous notons par Γ la courbe en $\mathbb{R}^3$ associée à $([a,b),\gamma)$. Nous supposons qu'on a

$$[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 = 1, \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Pour tout $t \in [a,b]$ nous considérons le vecteur tangent à $\gamma(t)$ donné par $A(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ ainsi que le vecteur normal $B(t) = \begin{pmatrix} g'(t) \\ -f'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$; nous considérons aussi le troisième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (vecteur orthogonal au plan (Oxy)) donné par $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarquons que pour tout $t \in [a,b]$ les trois vecteurs $A(t), B(t)$ et e_3 forment une base orthonormée en $\mathbb{R}^3$.

Nous considérons aussi pour tout $t \in [a,b]$ le plan orthogonal à $A(t)$ passant par $\gamma(t)$:

$$E(t) = \{\gamma(t) + uB(t) + ve_3, \quad u, v \in \mathbb{R}\}.$$

On se donne aussi $r > 0$.

Pour tout $t \in [a,b]$ nous considérons dans le plan $E(t)$ le cercle noté D_t de centre $\gamma(t)$ et rayon r; une paramétrisation de ce cercle est donnée par $([0,\, 2\pi], \varphi)$ avec $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(t) = \gamma(t) + r\cos(\theta)B(t) + r\sin(\theta)e_3, \quad \forall\, \theta \in [0,\, 2\pi].$$

Nous considérons dans la suite la surface S dans l'espace $\mathbb{R}^3$ qui est l'union de tous les cercles D_t pour $t \in [a,b]$ donc

$$S = \cup_{t\in[a,b]} D_t$$

Un paramétrisation (nappe paramétrée) de cette surface S est alors $(\overline{D},\, \psi)$ avec $D =]0,\, 2\pi[\, \times\,]a, b[$ et $\psi : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\psi(\theta, t) = \gamma(t) + r\cos(\theta) B(t) + r\sin(\theta) e_3, \quad \forall\, (\theta, t) \in \overline{D}.$$

On se donne aussi une fonction $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$V(x, y, z) = x\, y, \quad \forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

et le champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$F = \nabla V.$$

Partie I. On considère dans cette partie le cas particulier: $a = 0$, $b = 1$ et $(f(t),\, g(t)) = (\alpha t,\, \beta t), \quad \forall\, t \in [0, 1]$,
avec $\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Ia) Quelle est la courbe Γ?

Ib) Quelle est la surface S?

Ic) Calculer $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ et montrer qu'on a

$$\left\| \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)(\theta, t) \right\| = r, \quad \forall\, (\theta, t) \in \overline{D}.$$

Id) Montrer que tous les points de ψ sont réguliers et trouver le vecteur normal ν à ψ.

Ie) Calculer l'intégrale de surface de V sur ψ, c'est à dire, calculer $\int_\psi V(x)\, d\sigma$.

Partie II. On considère dans cette partie le cas particulier: $a = 0$, $b = \pi$ et $(f(t),\, g(t)) = (\cos t,\, \sin t), \quad \forall\, t \in [0, \pi]$.

IIa) Quelle est la courbe Γ?

IIb) Donner les points réguliers de ψ et trouver le vecteur normal ν à ψ pour ces points réguliers.

IIc) On suppose ici $r < 1$. Calculer l'aire de la surface S.

IId) On considère l'arc paramétré obtenu de ψ en fixant $\theta = \frac{\pi}{2}$. On notera par ψ_1 cet arc paramétré.
Quel est le support de ψ_1? Calculer la circulation de F sur ψ_1.

IIe) Trouver l'intersection entre la surface S et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = r^2$.