Corrigé Partiel 1 MMJ 2020-2021

Exo 1

a) $f_1(x) = g_1(x)\cdot e^{-x}$ avec $g_1(x) = \frac{x^4+3}{x^2+1}\, e^{-2x}$

On a $g_1(x) = \underbrace{\frac{x^2+\frac{3}{x^2}}{x^2+1}}_{\to 1} \; \underbrace{x^2 e^{-2x}}_{\to 0 \text{ si } x \to \infty}$

donc $g_1(x) \longrightarrow 0$ si $x \to +\infty$

Alors il existe $M>0$ tel que $|g_1(x)| \le 1$ si $x \geq M$ ce qui donne

$|f_1(x)| \le e^{-x}$ si $x \geq M$.

Donc f_1 est i.L sur $]M, \infty[$ car $x \to e^{-x}$ l'est.

D'autre part f_1 est i.L sur $[0, M]$ car fonction continue sur un compact. Donc f_1 est i.L sur $[0, \infty[$.

b) $f_2(x) = g_2(x)\, \frac{1}{x^{1/3}}$ avec

$g_2(x) = \frac{\sin^2(2x)}{(2x)^2}\, \frac{4}{2x+3}$ donc

Mais $\frac{\sin(2x)}{2x} \longrightarrow 1$ si $x \to 0_+$

$g_2(x) \longrightarrow \frac{4}{3}$ si $x \to 0_+$

On deduit : il existe $\delta > 0$ tel que

$|g_2(x)| \le 2$ si $x \in]0, \delta]$

Alors $|f_2(x)| \le \frac{2}{x^{1/3}}$ si $x \in]0, \delta]$ car $x \to \frac{1}{x^{1/3}}$ l'est

Donc f_2 est i.L. sur $]0, \delta]$

D'autre part, si $x > \delta$ on a

$|f_2(x)| \le \frac{1}{x^{7/3}}$ (car $|\sin^2(2x)| \le 1$, $|2x+5| = 2x+5 \geq 5 \geq 1$)

Alors f_2 est i.L sur $]\delta, +\infty[$ car $x \to \frac{1}{x^{7/3}}$ l'est.

Finalement f_2 est i.L sur $]0, \infty[$.

c) $f_3(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+2)(x-2)}$

On fait le changement de variable $x = y+2$.

On pose $g_3(y) = f_3(y+1) = \dfrac{(y+1)^2+1}{(y+4)y} = \dfrac{y^2+2y+2}{y(y+4)}$

Comme la fonction $y \to y+2$ est une bijection entre $]0,1[$ et $]2,3[$ alors f_3 est i.L sur $]2,3[$ ssi g_2 est i.L sur $]0,1[$.

$g_3(y) = h_3(y)\,\dfrac{1}{y}$ avec $h_3(y) = \dfrac{y^2+2y+2}{y+4}$

$\left.\begin{array}{l} y+4 \leq 1+4 \leq 5 \\ y^2+2y+2 \geq 2 \end{array}\right\} \quad \forall\, y \in]0,1[$

$\forall\, y \in]0,1[$

donc $h_3(y) \geq \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ $\quad \forall\, y \in]0,1[$

Alors $g_3(y) \geq \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{y}$

comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{y}\,dy = +\infty$ alors g_3 n'est pas i.L sur $]0,1[$

donc f_3 n'est pas i.L sur $]2,3[$

Exercice 2.

a) On a $0 < e^{-(x-1)y} < 1$ car $x-1>0,\ y>0$

donc $|e^{-(x-1)y} f(x)| < |f(x)|$ $\quad \forall\, x>1,\ y>0$

Comme f est i.L alors la fonction

$x \longrightarrow e^{-(x-1)y}$ est i.L sur $[1,\infty[$ $\quad \forall\, y>0$

b) On utilise le théorème de conv. dominée de Lebesgue

On a :

i) Pour tout $x \in]1,\infty[$ comme $y_n \longrightarrow y$ on a

$e^{-(x-1)y_n} \longrightarrow e^{-(x-1)y}$

donc $e^{-(x-1)y_n} f(x) \longrightarrow e^{-(x-1)y} f(x)$

ii) Comme $0 < e^{-(x-1)y_n} < 1$ car $x>1,\ y_n>0$

on a

$|e^{-(x-1)y_n} f(x)| \leq |f(x)|$ $\quad \forall\, x>0,\ \forall\, n.$

On sait que $|f| \geq 0$ et $|f|$ ~~integr~~ i.L

On en deduit

$$\int_1^\infty e^{-(x-1)y_n} f(x)\,dx \longrightarrow \int_1^\infty e^{-(x-1)y} f(x)\,dx$$
si $n \to \infty$

donc

$g(y_n) \longrightarrow g(y)$ pour $n \to \infty$.

c) On utilise encore le théo. conv. dom. de Lebesgue.

i) pour tout $x > 1$ on a

$e^{-(x-1)n} \longrightarrow 0$ pour $n \to \infty$ (car $-(x-1) < 0$)

donc

$e^{-(x-1)n} f(x) \longrightarrow 0$ pour $n \to +\infty$

ii) Comme en b) on a $\forall x > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$|e^{-(x-1)n} f(x)| \leq |f(x)|$

ce qui donne

$$\int_1^\infty e^{-(x-1)n} f(x)\,dx \longrightarrow \int_0^\infty 0\,dx = 1$$ donc

$g(n) \longrightarrow 0$ pour $n \to \infty$.

<u>Exercice 3.</u>

a) Nous avons $\int_{-1}^1 |f(x)|^3 dx < \infty$ et il faut montrer $\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx < \infty$.

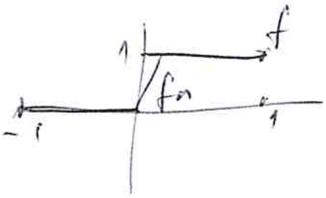
Holder avec $p = \frac{3}{2}$, $q = 3$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

On a

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 \underbrace{|f(x)|^2}_{=u} \cdot \underbrace{1}_{v}\,dx \leq$$

$$\leq \left(\int_{-1}^1 |u|^{3/2}\right)^{2/3} \left(\int_{-1}^1 |v|^3\right)^{1/3} = \left(\int_{-1}^1 \left(|f(x)|^2\right)^{3/2} dx\right)^{2/3} \cdot \left(\int_{-1}^1 1\right)^{1/3}$$

$$= \underbrace{\left(\int_{-1}^1 |f(x)|^3 dx\right)^{2/3}}_{<\infty} \cdot \underbrace{2^{1/3}}_{<\infty}$$ donc $< \infty$.



b) Prendre $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ nx & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Observer que f est continue $f(1-) = f(1+) = f(1) = 0$ /

(car $f(0-) = f(0+) = f(0) = 0$:

D'autre part

$$\int_\Omega \left(f_n(x) - f(x)\right)^2 dx = \int_0^{1/n} (nx-1)^2\, dx$$

(car $f_n = f$ sur $[-1, 0] \cup [\frac{1}{n}, 1]$)

si $0 < x < \frac{1}{n}$ donc

Mais $0 < nx < 1$

$|nx - 1| \leq |nx| + 1 \leq 1 + 1 \leq 2 \quad \forall x \in]0, \frac{1}{n}[.$

donc $(nx-1)^2 \leq 4$

Alors $\int_0^{1/n} (nx-1)^2\, dx \leq 4 \cdot \frac{1}{n} = \frac{4}{n} \longrightarrow 0$ pour $n \to \infty$

$\left(\int_0^{1/n} (nx-1)^2\, dx\right)^{1/2} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$.

donc $f_n \longrightarrow f$ en $L^2(\Omega)$