# Corrigé Partiel 2 MMJ 2020-2021

## Exercice 1.

a) La paramétrisation est $(\bar{D}, \gamma)$ avec

$D = ]0, 2\pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , $\gamma : \bar{D} \longrightarrow R^3$

$$\gamma(\theta, \varphi) \longrightarrow \gamma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 2 + 3\cos\varphi\cos\theta \\ -1 + 3\cos\varphi\sin\theta \\ 3\sin\varphi \end{pmatrix}$$

b) ~~C'est $(\bar{D}_+, \gamma_+)$~~

On utilise la même paramétrisation qu'en a) chercher $(\theta, \varphi) \in D$ tels que $-1 + 3\cos\varphi\sin\theta \geq -1$

$\iff \cos\varphi\sin\theta \geq 0$

Comme $\cos\varphi > 0$ $\forall \varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

il faut avoir $\sin\theta \geq 0$, donc $\theta \in ]0, \pi[$

Alors la paramétrisation de $S_+$ sera

~~$D_+ = ]0, \pi[$~~ $(\bar{D}_+, \varphi)$

$D_+ = ]0, \pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\varphi : \bar{D}_+ \longrightarrow R^3$ le même $\varphi$ qu'en a)

c) c1) On pose la condition

$$-3\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 3\sin\varphi \leq 3\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{donc}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\varphi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ceci donne $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

Donc la paramétrisation ~~sera~~ de $S_C$ sera

$(\bar{D}_C, \varphi)$

$D_C = ]0, 2\pi[ \times ]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$

$\varphi : D_c \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la même expression qu'en a)

c2) $\text{Aire}(S_c) = \int_{S_c} 1\, d\sigma = \int_{D_c} \|(P \wedge q)(\theta, \varphi)\|\, d\theta\, d\varphi$

avec $\|P \wedge q\| = r^2 \cos\varphi = 9 \cos\varphi$

Donc $\text{Aire}(S_c) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} 9 \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi =$

$= 18\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\, d\varphi = 18\pi \left(\sin\varphi\right)_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 18\sqrt{2}\pi.$

d)

d1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma(\theta, \varphi)$ et $x - 2 = y + 1$ alors

$2 + 3\cos\varphi \cos\theta - 2 = -1 + 3\cos\varphi \sin\theta + 1$

$\Leftrightarrow \cos\varphi \cos\theta = \cos\varphi \sin\theta$

Si $(\theta, \varphi) \in D_+$ alors $\cos\varphi > 0$ donc

$\sin\theta = \cos\theta$

La seule solution $\theta \in ]0, \pi[$ de cette equation est $\theta = \frac{\pi}{4}$

Alors une parametrisation de $\Gamma_+$ est

$\left([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \xi\right)$

$\xi : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\varphi \longrightarrow \xi(\varphi) = \gamma(\frac{\pi}{4}, \varphi) = \begin{pmatrix} 2 + 3\cos\varphi \cos\frac{\pi}{4} \\ -1 + 3\cos\varphi \sin\frac{\pi}{4} \\ 3\sin\varphi \end{pmatrix}$

donc $\xi(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 + 3\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi \\ -1 + 3\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi \\ 3\sin\varphi \end{pmatrix}$

d2) $L(\Gamma_+) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \|\xi'(\varphi)\| d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\| \begin{matrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\varphi \\ -3\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi \\ 3\cos\varphi \end{matrix} \right\| d\varphi =$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{9}{2}\sin^2\varphi + \frac{9}{2}\sin^2\varphi + 9\cos^2\varphi} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\,d\varphi = 3\pi.$$

## Exercice 2.

a) Si $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $\cos t \geq 0$

donc $x = a\cos t \geq 0$.

b) $p = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -a\cos t\sin\theta \\ a\cos t\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ ; $q = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -a\sin t\cos\theta \\ -a\sin t\sin\theta \\ a\sqrt{2}\cos t \end{pmatrix}$

Alors

$$p \wedge q = \begin{pmatrix} a^2\sqrt{2}\cos^2 t\cos\theta + 0 \\ 0 + a^2\sqrt{2}\cos^2 t\sin\theta \\ a^2\sin t\cos t\sin^2\theta + a^2\sin t\cos t\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

donc

$$p \wedge q = \begin{pmatrix} a^2\sqrt{2}\cos^2 t\cos\theta \\ a^2\sqrt{2}\cos^2 t\sin\theta \\ a^2\sin t\cos t \end{pmatrix} = a^2\cos t\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t\cos\theta \\ \sqrt{2}\cos t\sin\theta \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Alors

$$\|p \wedge q\| = |a^2 \underbrace{\cos t}_{\geq 0}| \sqrt{2\cos^2 t\cos^2\theta + 2\cos^2 t\sin^2\theta + \sin^2 t}$$

$$= a^2\cos t\sqrt{2\cos^2 t + \sin^2 t} = a^2\cos t\sqrt{2 - 2\sin^2 t + \sin^2 t}$$

ce qui donne le résultat

Les points reguliers de $\varphi$ sont tels que

$\cos t \neq 0$ et $\sqrt{2 - \sin^2 t} \neq 0$

$\cos t \neq 0 \Leftrightarrow t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\sqrt{2 - \sin^2 t}$ est toujours $> 0$ car $\sin^2 t \leq 1 < 2$.

Donc les points reguliers ~~sont~~ correspond à $(\theta, t) \in [0, 2\pi[ \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\text{Aire}(\Sigma) = \int_{\Sigma} 1\, d\sigma = \int_{D} \|(P \wedge q)(\theta, t)\|\, d\theta dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\pi} a^2 \cos t \sqrt{2 - \sin^2 t}\, d\theta dt$$

$$= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos t \sqrt{2 - \sin^2 t}\, dt$$

On pose $x = \sin t$ (l'application $t \to \sin t$ est bijective sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Alors comme $\cos t = (\sin t)'$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ ; $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$\text{Aire}(\Sigma) = 2\pi a^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{2 - x^2}\, dx$$

On fait le changement de variables $x = \sqrt{2} \sin u$

L'application $u \to \sqrt{2} \sin u$ est une bijection entre $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et $[-1, 1]$ (car $\sqrt{2} \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -1$

$\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

Alors

$$\text{Aire}(\Sigma) = 2\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\underbrace{2 - 2\sin^2 u}_{= 2\cos^2 u}}\ \sqrt{2} \cos u\, du =$$

$\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$ car $\cos u \geq 0$

$$= 2\pi a^2 \cdot 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u\, du = 4\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos(2u)}{2}\, du$$

$$= 4\pi a^2 \left( \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\, du + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2u)\, du \right) =$$

$$= 4\pi a^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \left[ \sin(2u) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \right) = 4\pi a^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

Donc $\text{Aire}(\Sigma) = \pi a^2 (\pi + 2)$