Corrigé Partiel 3 - MMJ ~~MA~~ MAM30 2020-2021

Exo 1.

a) On applique $\mathcal{L}$ à (1)

Comme $\mathcal{L}(y')(s) = sY(s) - y(0+) = sY(s)$

$\mathcal{L}(y'')(s) = s^2 Y(s) - sy(0+) - y'(0+) = s^2 Y(s) - 3$

alors

$s^2 Y(s) - 3 + 6sY(s) + 9Y(s) = \frac{1}{s+2} \iff$

$\cancel{s^2(Y(s)} \; Y(s)(s^2+6s+9) = 3 + \frac{1}{s+2} = \frac{3s+7}{s+2} \iff$

$Y(s) = \frac{3s+7}{(s+2)(s^2+6s+9)} = \frac{3s+7}{(s+2)(s+3)^2}$

b) $\frac{3s+7}{(s+2)(s+3)^2} = \frac{a}{s+2} + \frac{b}{s+3} + \frac{c}{(s+3)^2} \implies$

On multiplie par $s+2$ et $\cancel{\lim_{s\to 2}}$ $\lim_{s\to -2}$

$\cancel{1=}$ $a = 1$ $\implies$

On multiplie par $(s+3)^2$ et $\lim_{s\to -3}$

$c = 2$

On multiplie par $s+3$ et $\lim_{\substack{s\in\mathbb{R}\\ s\to\infty}}$

$0 = a + b$ donc

$b = -1$

donc

$\cancel{X(s)=}$ $Y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} + \frac{2}{(s+3)^2}$

c) ~~De b) on déduit~~

~~$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^{-2t}) - \mathcal{L}(e$~~

Nous avons

$\frac{1}{s+3} = \mathcal{L}(e^{-3t}) \implies \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+3}\right) = \mathcal{L}(-te^{-3t}) \iff$

$\frac{1}{(s+3)^2} = \mathcal{L}(te^{-3t})$

De b) On obtient

$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^{-2t} - e^{-3t} + 2te^{-3t})$.

Ceci donne

$y(t) = e^{-2t} + (2t-1)e^{-3t}$

Exo 2.

a) Si $t>0$ alors $\int_0^t f(\tau)\,d\tau = \int_0^t \underbrace{H(t-\tau)}_{=1} f(\tau)\,d\tau$ ($t-\tau \geq 0$)

$= (H * f)(t)$

Si $t<0$ alors $g(t)=0=(H*f)(t)$.

Comme $f, H \in$ ~~L_{loc}~~ $\mathcal{L}_+$ alors $f*H$ existe et $\in \mathcal{L}_+$

b) Comme $f, H \in \mathcal{L}_a$ alors $f*H \in \mathcal{L}_a$ (résultat du cours)

c) $\mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(f*H)(s) = \mathcal{L}(H)(s)\cdot\mathcal{L}(f)(s)$

$= \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)(s)$

d) On pose $h_1(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)H(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$\mathcal{L}(h_1)(s) = \frac{1}{s^2+4}$

~~Alors On pose $h_2(t)=$~~

On pose $h_2(t) = \begin{cases} \int_0^t h_1(s)\,ds & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t\leq 0 \end{cases}$

Alors $\mathcal{L}(h_2)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(h_1)(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}$

si $t>0$ alors

$h_2(t) = \int_0^t \left[-\frac{1}{4}\cos(2\tau)\right]' d\tau = -\frac{1}{4}\cos(2t)+\frac{1}{4}$

Finalement la fonction demandée est

$h_2(t) = \frac{1}{4}(1-\cos(2t))H(t)$

Exo 3.

On notera toujours T l'application

a) $\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)\,dx$

avec

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad u(x) = \cos(\pi x) + x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

u est continue, donc $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Alors T est une distribution, c'est la distribution régulière associée à u, notée T_u.

b) ~~$<T,\varphi> =$~~ T est une combinaison linéaire de 3 distributions de Dirac sur $\mathbb{R}$. donc T est une distribution

$$T = 2\delta - 4\delta_2 + 3\delta_{-10}$$

c) On ~~note~~ va montrer que T n'est pas définie donc T n'est pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

On choisit $\varphi = \theta_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (vue en cours)

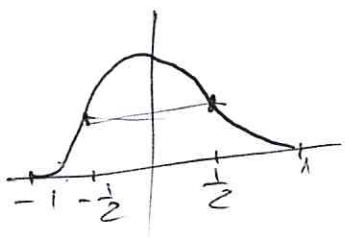
$$\theta_1(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction ~~Comme~~ θ_1 est ~~continue et~~ strictement croissante sur $]-1,0[$ et strictement décroissante sur $]0,1[$

$\left(\text{car } \begin{array}{ll} \theta_1'(x) < 0 & \text{si } ~~x<0 \text{ et}~~ \; 0 < x < 1 \\ \theta_1'(x) > 0 & \text{si } -1 < x < 0 \end{array}\right)$ et)

Alors $\theta_1(x) \geqslant \theta_1\left(\frac{1}{2}\right) \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$\left(\text{car } \theta_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta_1\left(\frac{1}{2}\right)\right)$



donc $\quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$\theta_1(x) \geqslant \exp\left(-\frac{4}{3}\right) > 0$

D'autre part $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Alors il existe $\delta \in]0, \frac{1}{2})$ tel que

$\frac{e^x - 1}{x} \geq \frac{1}{2}$ $\forall x \in [-\delta, \delta]$

Alors

$$\frac{e^x - 1}{x^3} \theta_1(x) = \frac{1}{x^2} \underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\geq \frac{1}{2}} \underbrace{\theta_1(x)}_{\geq \exp(-\frac{4}{3})} \geq \frac{\alpha}{x^2}, \quad \forall x \in [-\alpha, \alpha]$$

avec $\alpha = \frac{1}{2} \exp(-\frac{4}{3}) > 0$

Comme $\int_0^\delta \frac{\alpha}{x^2} dx = +\infty$ alors la fonction $x \longrightarrow \frac{e^x - 1}{x^3} \theta_1(x)$ n'est pas integrabl Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exo 4.

Partie I.

I a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{KT} f(t) dt + \int_{KT}^x f(t) dt$

Mais $\int_0^{KT} f(t) dt = \sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{\int_{jT}^{(j+1)T} f(t) dt}_{=0} = 0$

Donc

$F(x) = \int_{KT}^x f(t) dt \implies$

$|F(x)| \leq \int_{KT}^x |f(t)| dt \leq \int_{KT}^{(k+1)T} \underbrace{|f(t)|}_{\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|} dt \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ (f bornée)

I b) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ fixé. Il existe $M > 0$ tel que $\varphi(t) = 0$ si $|x| \geq M$.

Alors

$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) dx = \int_{-M}^{M} \frac{1}{n} \frac{d}{dt} F(nx) \varphi(x) dx$ -

(integration par parties) $= \frac{1}{n} \Big[F(nM) \underbrace{\varphi(M)}_{=0} - F(-nM) \underbrace{\varphi(-M)}_{=0} - \int_{-M}^{M} F(nx) \varphi'(x) dx \Big] \implies$

$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = -\frac{1}{n} \int_{-M}^{M} F(nx) \varphi'(x) dx$

$\left| \int_{-M}^{M} F(nx) \varphi'(x) dx \right| \leq \underbrace{\sup_{y \in \mathbb{R}} |F(y)| \cdot \sup_{y \in \mathbb{R}} |\varphi'(y)| \cdot 2M}_{< \infty}$ constante

Alors $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle \longrightarrow 0 = \langle 0, \varphi \rangle$ si $n \to \infty$

$\Rightarrow f_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Partie II.

On observe que

$$\int_0^T g(x)\,dx = \underbrace{\int_0^T f(x)\,dx}_{=TM(f)} - \underbrace{\int_0^T M(f)\,dx}_{=TM(f)} = 0$$

Alors si on pose $g_n(x) = g(nx)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

on a

$g_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Mais $g_n = f_n - M(f)$ donc $f_n = g_n + M(f)$

Comme $g_n \longrightarrow 0$ alors $f_n \longrightarrow M(f)$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$