Polytech Lyon, MAM3A, 2020-2021

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 1 - octobre 2020

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

a) Soit $f_1 : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_1(x) = \frac{x^4+3}{x^2+1} e^{-3x}, \quad \forall\, x \geq -1.$$

Montrer que f_1 est intégrable Lebesque.

b) Soit $f_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_2(x) = \frac{\sin^2(2x)}{x^{7/3}(2x+5)}, \quad \forall\, x > 0.$$

Montrer que f_2 est intégrable Lebesque.

c) Soit $f_3 :]2, 3[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_3(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}, \quad \forall\, x \in]2, 3[.$$

Montrer que f_3 n'est pas intégrable Lebesgue.

Exercice 2.

On se donne $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable Lebesque et on introduit la fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_1^{+\infty} e^{-(x-1)y} f(x)dx, \quad \forall\, y > 0.$$

a) Montrer que la fonction g est bien définie (ceci revient à montrer que pour tout $y > 0$ la fonction $x \to e^{-(x-1)y} f(x)$ est intégrable Lebesgue sur $[1, +\infty[$).

b) Montrer que g est une fonction continue.

Indication: montrer que pour tout $y > 0$ fixé et toute suite $(y_n) \subset]0, +\infty[$ avec $y_n \to y$ pour $n \to +\infty$ on a $g(y_n) \to g(y)$ pour $n \to +\infty$.

c) Montrer que $g(n)$ converge vers une limite à trouver si $n \to +\infty$.

Exercice 3.

Soit Ω l'intervalle ouvert donné par $\Omega =]-1, 1[$.

a) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $f \in L^3(\Omega)$. Montrer que $f \in L^2(\Omega)$.

Indication: utiliser l'inégalité de Holder.

b) Montrer qu'on peut trouver une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $f \in L^2(\Omega)$ et $f \notin C(\Omega)$ et une suite des fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $f_n \in C(\overline{\Omega})$ telles que

$$f_n \to f \quad \text{en } L^2(\Omega) \quad \text{pour } n \to +\infty$$

(c'est à dire $\left(\int_\Omega [f_n(x) - f(x)]^2\, dx\right)^{1/2} \to 0$ pour $n \to +\infty$).

Indication: choisir f constante par morceaux et chaque f_n affine par morceaux.