Polytech Lyon, MAM3A, 2020-2021

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 2 - 2020

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.
On considère la sphère en $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9\}.$$

a) En suivant l'exemple général du cours, donner une paramétrisation (nappe paramétrée) de classe C^1 de S utilisant des coordonnées cylindrique.
b) Considérons la demisphère

$$S_+ = \{(x, y, z) \in S, \quad y \geq -1\}.$$

Donner une paramétrisation de classe C^1 pour S_+.
Utiliser la paramétrisation de **a)** *mais avec un domaine de définition différent.*
c) Considérons la surface suivante (c'est une calotte sphérique):

$$S_c = \left\{(x, y, z) \in S, \quad -3\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

c1) Donner une paramétrisation de classe C^1 de S_c.
c2) Calculer l'aire de S_c.
d) On considère la courbe Γ_+ qui s'obtient en faisant l'intersection entre la surface S_+ et le plan d'équation $x - 2 = y + 1$.
d1) Donner une paramétrisation de classe C^1 (arc paramétré) de Γ_+.
d2) Calculer la longueur de Γ_+.

Exercice 2. On va considérer dans cet exercice l'ellipsoïde de révolution dans l'espace de répère $(Oxyz)$.
Dans le plan $y = 0$ on considère une demi-ellipse Γ paramétrée par $([-\pi/2,\ \pi/2], \gamma)$, avec $\gamma : [-\pi/2,\ \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$t \ \mapsto\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ 0 \\ a\sqrt{2}\sin t \end{pmatrix}$$

avec $a > 0$ un paramètre.
a) Montrer que Γ reste dans le demi-plan $x \geq 0$ du plan $y = 0$ de l'espace.

Dans la suite on considère la surface de révolution Σ engendrée par la rotation de Γ autour de l'axe Oz (c'est l'ellipsoïde de révolution). Une paramétrisation de classe C^1 de

Σ sera $(\overline{D}, \varphi)$ avec $D =]0, 2\pi[\times] - \pi/2, \pi/2[$ et $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\varphi(\theta, t) = \begin{pmatrix} a\cos(t)\cos(\theta) \\ a\cos(t)\sin(\theta) \\ a\sqrt{2}\sin(t) \end{pmatrix}, \quad \forall\,(\theta, t) \in \overline{D}.$$

b) Montrer qu'on a

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| = a^2 \cos(t) \sqrt{2 - \sin^2(t)}.$$

Quels sont les points réguliers de φ?

c) Calculer l'aire de la surface Σ.

Indication: faire deux changements de variables successifs: commencer par $x = \sin(t)$.