Polytech Lyon, MAM3A, 2020-2021

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 3 - janvier 2021

Durée 1h30 - Cours, TD et calculettes autorisés

Partout H désigne la fonction de **Heaviside**, $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $H = 1_{[0,+\infty[}$.

Exercice 1.
On se propose de trouver la fonction $y \in C^2([0, +\infty[)$ avec $y, y', y'' \in \mathcal{L}_a$, solution de l'équation différentielle

$$(1) \qquad y'' + 6y' + 9y = e^{-2t}, \quad \forall\, t \in [0, +\infty[$$

avec conditions initiales

$$(2) \qquad \begin{cases} y(0) & = 0 \\ y'(0) & = 3. \end{cases}$$

Nous considérons que toutes les fonctions qui interviennent dans le problème se prolongent par 0 sur $]-\infty, 0[$.

a) On pose $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$ définie sur $\{s \in \mathbb{C},\ Re(s) > \xi_a(y)\}$. Montrer qu'on a

$$Y(s) = \frac{3s+7}{(s+2)(s+3)^2}, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}, \quad \text{avec } Re(s) > \xi_a(y).$$

b) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que

$$\frac{3s+7}{(s+2)(s+3)^2} = \frac{a}{s+2} + \frac{b}{s+3} + \frac{c}{(s+3)^2}, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}\backslash\{-2, -3\}.$$

c) Trouver la solution y de (1) - (2).

Exercice 2.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f \in \mathcal{L}_a$. Notons par $\Pi(f) \subset \mathbb{C}$ le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$.
On introduit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \begin{cases} \int_0^t f(\tau)\, d\tau & \text{si} \quad t \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction g est bien définie et qu'elle peut s'écrire comme la convolution entre f et la fonction de Heaviside H.

b) Montrer que $g \in \mathcal{L}_a$.

Nous notons dans la suite par $\Pi(g)$ *le domaine de définition de* $\mathcal{L}(g)$.

c) Montrer qu'on a

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)(s), \quad \forall\, s \in \Pi(f) \cap \Pi(g).$$

d) Application:
Utilisez les points précédents pour trouver $h \in \mathcal{L}_a$ tel que

$$\mathcal{L}(h)(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}, \quad \forall\, s \in \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad Re(s) > 0.$$

Exercice 3.
Pour chacune des applications suivantes de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, précisez (en justifiant) si elles sont bien définies et si elles sont des distributions:
a) $\varphi \;\to\; \int_{\mathbb{R}} (\cos(\pi x) + x^2)\varphi(x)\,dx$
b) $\varphi \;\to\; 2\varphi(0) - 4\varphi(2) + 3\varphi(-10)$
c) $\varphi \;\to\; \int_{\mathbb{R}} \frac{e^x-1}{x^3}\varphi(x)\,dx$

Exercice 4.
On se donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique (donc $f(t) = f(t+T),\ \forall\, t \in \mathbb{R}$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on introduit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = f(nt), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

On introduit aussi la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(F est une primitive de f).
On se propose de trouver une limite au sens des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, quand $n \to +\infty$, de la suite des fonctions f_n.

Partie I.
On suppose ici que f satisfait

$$\int_0^T f(t)\,dt = 0.$$

Ia) Montrer que la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$.
Indication: utiliser le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [kT, (k+1)T[$ (k est la partie entière de $\frac{x}{T}$) et le fait que $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{kT} f(t)\,dt + \int_{kT}^x f(t)\,dt$.
Ib) En utilisant le fait que $f_n(x) = \frac{1}{n}\frac{d}{dx}F(nx)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ montrer que

$$f_n \to 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad \text{pour} \quad n \to +\infty.$$

Partie II (cas général).
On pose ici $M(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$ (moyenne de f sur l'intervalle $[0,T]$). Montrer que

$$f_n \to M(f) \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad \text{pour} \quad n \to +\infty.$$

Indication: Utiliser la **Partie I** *pour la fonction $g = f - M(f)$.*