Corrigé Partiel 1 MMJ 2021-2022

Exo 1.

a) On écrit
$f_1(x) = g_1(x)\, e^{-x}$ avec
$g_1(x) = \frac{x^3}{x^2+1} e^{-x}$.

On a : g_1 continue sur $[0, +\infty[$ et
$\lim_{x\to\infty} g_1(x) = 0$ (car $\left|\frac{x^3}{x^2+1} e^{-x}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\geq 1}\ x^3 e^{-x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$

Alors g_1 est bornée sur $[0, +\infty[$
Comme $x \to e^{-x}$ est i.L alors f_1 est i.L.

b) On considère $A =]0, 1]$ et $B =]1, +\infty[$

Sur A : $f_2(x) = g_2(x) \frac{1}{\sqrt{x}}$ avec $g_2(x) = \frac{\sin^2(2x)}{x^2(2x+3)}$

On a $\lim_{x\to 0+} g_2(x) = \underbrace{\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)^2}_{=2^2} \underbrace{\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x+3}}_{=\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$

Comme g_2 est continue sur $]0, 1]$ alors g_2 est bornée sur $]0,1]$
Comme la fonction $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ est i.L sur A
alors f_2 est i.L sur A.

Sur B. :
Il est facile de voir que
$|f_2(x)| \leq \frac{1}{x^{5/2}\underbrace{(2x+3)}_{\geq 3}} \leq \frac{1}{3x^{5/2}}$ $\forall x \in B$.

Comme la fonction $x \to \frac{1}{x^{5/2}}$ est i.L sur B
alors f_2 est i.L sur B
Alors f est i.L sur $]0, +\infty[$.

c) $f_3(x) = g_3(x) \cdot \frac{1}{x}$ avec $g_3(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

On sait que $e^x - 1 \geq x$ $\forall x > 0$
donc $g_3(x) \geq 1$ $\forall x > 0$
Alors $f_3(x) \geq \frac{1}{x}$ $\forall x \in]0, 2[$.
Comme la fonction $x \to \frac{1}{x}$ n'est pas i.L sur $]0, 2[$

alors f_3 n'est pas i.L sur $]0,2[$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

Alors il existe $M>1$ tel que

$f_4(x) \geq 1 \quad \forall x \geq M$

Comme la fonction $x \mapsto 1$ n'est pas i.L sur $[M, +\infty[$ alors f_4 n'est ~~p~~ pas i.L sur $[M, \infty[$

donc non i.L sur $]1, +\infty[$.

Exo 2.

a) Comme $]0,1[\times]0,2\pi[\subset]0,\infty[\times]0,2\pi[$ alors φ est injective sur U.

Il suffit de montrer

$\varphi(U) = V$

- Montrons $\varphi(U) \subset V$

Soit $x = \varphi(\rho, \theta) \in \varphi(U)$ avec $(\rho,\theta) \in]0,1[\times]0,2\pi[$

Alors $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = \frac{a_1^2\rho^2\cos^2\theta}{a_1^2} + \frac{a_2^2\rho^2\sin^2\theta}{a_2^2} = \rho^2 < 1$ car $\rho<1$

donc $x \in \Omega$

Comme $\theta \neq 0$ (mod 2π) et $\rho>0$ alors $\begin{pmatrix} a_1\rho\cos\theta \\ a_2\rho\sin\theta\end{pmatrix} \notin [0,a_1[\times\{0\}$

donc $\varphi(x) \notin [0,a_1[\times\{0\}$

- Montrons $V \subset \varphi(U)$

Soit $x = (x_1,x_2) \in \Omega \setminus ([0,a_1[\times\{0\})$

Alors $x \notin [0,\infty[\times\{0\}$

(par absurd : si $x \in [0,\infty[\times\{0\}$ alors

comme $x \notin [0,a_1[\times\{0\}$ alors $x \in [a_1,\infty[\times\{0\}$

alors $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = \frac{x_1^2}{a_1^2} + 0 \geq 1$ donc $x \notin \Omega$ contradiction)

Alors $x \in \mathbb{R}^2 \setminus ([0,+\infty[\times\{0\})$

donc il existe $\rho>0$ et $\theta \in]0,2\pi[$ tels que

$x = \varphi(\rho,\theta)$. Il reste à montrer $\rho<1$

Mais comme $x \in \Omega$ alors

$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} < 1$ donc $\frac{a_1^2 \rho^2 \cos^2\theta}{a_1^2} + \frac{a_2^2 \rho^2 \sin^2\theta}{a_2^2} < 1$

donc $\rho^2 < 1$ ce qui donne $\rho < 1$

Alors $x \in \varphi(U)$ ce qui montre le résultat.

b) de a) $\Rightarrow$ $\Omega = \underbrace{V \cup ([0, a_1[\times \{0\})}_{\text{disjointes}}$

Alors $\lambda_2(\Omega) = \lambda_2(V) + \lambda_2([0, a_1[\times \{0\})$

Mais le segment $[0, a_1[\times \{0\}$ est λ_2-negligeable

donc $\lambda_2([0, a_1[\times \{0\}) = 0$

$\Rightarrow \lambda_2(\Omega) = \lambda_2(V)$

c) $\lambda_2(V) = \int_V 1 \, dx$

On a : $J\varphi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} a_1 \cos\theta & -a_1 \rho \sin\theta \\ a_2 \sin\theta & a_2 \rho \cos\theta \end{pmatrix}$

$\det J\varphi(\rho, \theta) = a_1 a_2 \rho \cos^2\theta + a_1 a_2 \rho \sin^2\theta = a_1 a_2 \rho > 0$ $\forall \rho > 0$

On peut alors utiliser le Théorème de changement des variables :

$\lambda_2(V) = \int_U 1 \cdot a_1 a_2 \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{]0,1[\times]0,2\pi[} a_1 a_2 \rho \, d\rho \, d\theta$

$\overset{\text{Fubini 2D}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} a_1 a_2 \rho \, d\theta \right) d\rho = \int_0^1 2\pi a_1 a_2 \rho \, d\rho =$

$\left[a_1 a_2 \pi \rho^2 \right]_0^1 = a_1 a_2 \pi$.

Donc $\lambda_2(\Omega) = a_1 a_2 \pi$.

Exo 3.

a) ~~Comme~~ On a $f^2(x) + \eta_k \geq \eta_k$ $\Rightarrow$

$(f^2(x) + \eta_k)^{3/2} \geq \eta_k^{3/2}$ donc

$$|h_k(x)| \leq |f(x)|\cdot|g(x)| \; \frac{\eta_k}{\eta_k^{3/2}}$$

$$= \eta_k^{-\frac{1}{2}} |f(x)|\cdot|g(x)|$$

Comme $\eta_k^{-\frac{1}{2}}$ est constante, ~~g~~ $|f|$ est borné (p.p) et $|g|$ ~~est~~ est i.L alors h_k est i.L.

b) Verifions les hypotheses du Théo conv. dominée Lebesgue.

i) Montrons $h_k(x) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ $\forall x \in \Omega$.

~~Deux~~ cas pour x :

Cas 1.
Si $f(x) = 0$ alors $h_k(x) = 0 \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Cas 2.
Si $f(x) \neq 0$ alors on calcule
$f^2(x+\eta_k \geq f^2(x)$ donc $\left(f^2(x+\eta_k\right)^{3/2} \geq \left(f^2(x)\right)^{3/2}$
$= |f(x)|^3 > 0$

Alors $|h_k(x)| \leq |f(x)|\cdot|g(x)| \dfrac{\eta_k}{|f(x)|^3} = \dfrac{g(x)}{f^2(x)} \eta_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$

ii) Montrons qu'il existe $\varphi \in L^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ (φ indep de k) tel que

$|h_k(x)| \leq \varphi(x)$ p.p. $x \in \Omega$.

Nous avons $|f(x)|\cdot\sqrt{\eta_k} \leq \frac{1}{2}\left(f^2(x) + \eta_k\right)$ | utiliser $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

Alors $|h_k(x)| = \underbrace{\dfrac{|f(x)|\cdot\sqrt{\eta_k}}{f^2(x)+\eta_k}}_{\leq \frac{1}{2}} \dfrac{|g(x)| \sqrt{\eta_k}}{\left(f^2(x+\eta_k\right)^{1/2}} \leq$

$\leq \dfrac{1}{2} \dfrac{|g(x)|\sqrt{\eta_k}}{\cancel{f^2(x)+}\sqrt{f^2(x+\eta_k}}$ donc

Mais $\sqrt{f^2(x+\eta_k} \geq \sqrt{\eta_k}$

$|h_k(x)| \leq \frac{1}{2} |g(x)| \dfrac{\sqrt{\eta_k}}{\sqrt{\eta_k}} = \frac{1}{2}|g(x)|$. OK. avec $\varphi = \frac{1}{2}|g|$.

Alors $\lim\limits_{k\to\infty} \int_\Omega h_k(x)dx = \int_\Omega \lim\limits_{k\to\infty} h_k(x)dx = \int_\Omega 0\, dx = 0$.