Corrigé Partiel 2 MMJ, 2021-2022

Exo 1.

a) $E(h) = \dfrac{(x+u)^2 - x^2}{u+iv} = \dfrac{x^2+2xu+u^2-x^2}{u+iv} = \dfrac{u(u+2x)}{u+iv}$

b) si $h = \frac{1}{k}$ alors $u = \frac{1}{k}$, $v = 0$

$E(\frac{1}{k}) = \dfrac{\frac{1}{k}(\frac{1}{k}+2x)}{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} + 2x \longrightarrow 2x$

si $h = \frac{i}{k}$ alors $u = 0$, $v = \frac{1}{k}$

$E(\frac{i}{k}) = 0 \longrightarrow 0$

c) Comme $x \neq 0$ alors $\lim\limits_{k\to\infty} E(\frac{1}{k}) \neq \lim\limits_{k\to\infty} E(\frac{i}{k})$

donc f n'est pas dérivable en z

Exo 2.

a) Γ est le cercle dans le plan $y=0$ du centre $(a,0)$ et rayon r.

Comme $0<r<a$ alors $r\cos t \geq -r$ donc $a+r\cos t \geq a-r > 0$ $\forall t \in [0,2\pi)$, donc la x-composante de $\gamma(t)$ est ≥ 0

b) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -(a+r\cos t)\sin\theta \\ (a+r\cos t)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -r\sin t\cos\theta \\ -r\sin t\,\sin\theta \\ r\cos t \end{pmatrix}$

On a : $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} \wedge \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} (a+r\cos t) r\cos t\cos\theta \\ (a+r\cos t) r\cos t\,\sin\theta \\ (a+r\cos t) r\sin t\,\sin^2\theta + (a+r\cos t) r\sin t\cos^2\theta \end{pmatrix}$

donc

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} \wedge \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} r(a+r\cos t)\cos t\cos\theta \\ r(a+r\cos t)\cos t\,\sin\theta \\ r(a+r\cos t)\sin t \end{pmatrix} = r(a+r\cos t)\begin{pmatrix} \cos t\cos\theta \\ \cos t\sin\theta \\ \sin t \end{pmatrix}$

Donc $\left\|\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} \wedge \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right\| = |r(a+r\cos t)|\sqrt{\underbrace{\cos^2 t\cos^2\theta + \cos^2 t\sin^2\theta}_{=\cos^2 t} + \sin^2 t}$

$= r(a+r\cos t)$ car $a+r\cos t > 0$

c) Comme $a + r\cos t > 0 \quad \forall\, t \in [0, 2\pi)$ alors tous les points de $\bar{D}$ sont reguliers

$\nu = \frac{1}{\|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial t}\|} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ donc $\nu = \begin{pmatrix} \cos t \cos\theta \\ \cos t \sin\theta \\ \sin t \end{pmatrix}$

d) $\text{Aire}(S) = \iint_{\varphi} 1\, d\sigma = \int_D 1 \, \|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial t}\| \, d\theta\, d\varphi$

$= \int_D r(a + r\cos t)\, d\theta\, dt = r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (a + r\cos t)\, d\theta\, dt$

$= 2\pi r \int_0^{2\pi} (a + r\cos t)\, dt = 2\pi r \cdot 2\pi a = 4\pi^2 a r$

e) Resoudre en t :

$r \sin t = \frac{r}{2}$

Alors $\sin t = \frac{1}{2}$ donc $t \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

Si $t = \frac{\pi}{6}$ alors $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Si $t = \frac{5\pi}{6}$ alors $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

L'intersection de S avec le plan $z = \frac{r}{2}$ est $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où

Γ_1 est le cercle de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{r}{2} \end{pmatrix}$ et rayon $a + r\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans le plan $z = \frac{r}{2}$

et

Γ_2 est le cercle de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{r}{2} \end{pmatrix}$ et rayon $a - r\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans le plan $z = \frac{r}{2}$

f) Trouver t, θ tels que

$(a + r\cos t)^2 \cos^2\theta + (a + r\cos t)^2 \sin^2\theta = (a - r)^2$

$\Leftrightarrow (a + r\cos t)^2 = (a - r)^2$

$\Leftrightarrow a + r\cos t = \pm(a - r)$

Comme $a + r\cos t > 0$ il reste $a + r\cos t = a - r$

ce qui donne

$r\cos t = -r$ donc $\cos t = -1$ donc $\sin t = 0$

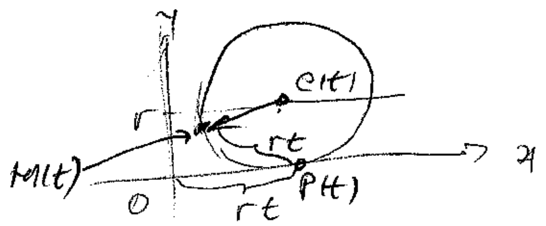
On obtient alors $t = \pi$; ~~ceci donne cos t =~~

~~On obtient alors~~

Alors l'intersection de S avec le ~~plan~~ cylindre $x^2+y^2=(a-r)^2$ est l'ensemble des triplets

$\begin{pmatrix} (a-r)\cos\theta \\ (a-r)\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

c'est le cercle de centre $(0,0,0)$, rayon $a-r$ dans le plan $z=0$. ~~(0xy)~~ (le plan (Oxy))



Exercice 3.

a) $C(t) = (rt, r)$

b) La longueur de l'arc de cercle $M(t)P(t)$ est rt ; (orienté positivement) donc l'angle est $\frac{rt}{r} = t$

c) Il faut ajouter $\frac{\pi}{2}$ au resultat de b) donc l'angle entre $\overrightarrow{C(t)M(t)}$ et l'axe (Ox) est $t+\frac{\pi}{2}$

Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{C(t)M(t)}$ sont $r\cos(-t-\frac{\pi}{2})$ et $r\sin(-t-\frac{\pi}{2})$

~~$r\cos(t+\frac{\pi}{2})$ et $r\sin(-(t+\frac{\pi}{2}))$~~

d) $M(t) = C(t) + \overrightarrow{C(t)M(t)}$

donc $M(t) = \begin{pmatrix} rt \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos(-t-\frac{\pi}{2}) \\ r\sin(-t-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$

Mais $\cos(-t-\frac{\pi}{2}) = \cos(t+\frac{\pi}{2}) = -\sin t$ ~~$\cos(t+\frac{\pi}{2}) = -\sin t$~~ et ~~donc~~

$\sin(-t-\frac{\pi}{2}) = -\sin(t+\frac{\pi}{2}) = -\cos t$

$M(t) = \begin{pmatrix} r(t-\sin t) \\ r(1-\cos t) \end{pmatrix}$

Parametrisation :

$([0,2\pi], \gamma)$

$\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longrightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} r(t-\sin t) \\ r(1-\cos t) \end{pmatrix}$

e) $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} r(1-\cos t) \\ r\sin t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ donc

$\|\gamma'(t)\| = r\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}$

$L(\gamma) = r\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt$.

On a :

$(1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t$

Alors

$\|\gamma'(t)\| = r\sqrt{2(1-\cos t)} = r\sqrt{2 \cdot 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 2r\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$

$= 2r\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ car $\frac{t}{2} \in [0,\pi] \Rightarrow \sin\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$.

Alors $\quad u = \frac{t}{2} \quad dt = 2du$

$L(\gamma) = 2r\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$

$= 4r\int_0^{\pi} \sin u\, du = 4r\left[-\cos u\right]_0^{\pi} = 8r$