Corrigé Partiel 3 MAM 2021-2022

Exo 1.

$H(t)$ = la fonction de Heaviside $= 1_{[0,+\infty[}$.

a) On applique $\mathcal{L}$ à (1) $\mathcal{L}(e^{2t}\cos(3t)H(t))$ donc

$\mathcal{L}(y'') - 4\mathcal{L}(y') + 13\mathcal{L}(y) =$

$s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0+)}_{=1} - \underbrace{y'(0+)}_{=0} - 4\left(s Y(s) - \underbrace{y(0+)}_{=1}\right) + 13 Y(s) = \frac{s-2}{(s-2)^2+9}$

Avec (2) on obtient

$$Y(s)(s^2-4s+13) = \frac{s-2}{(s-2)^2+9} + s-4$$

On observe que $s^2-4s+13 = (s-2)^2+9$

On obtient alors

$$Y(s) = \frac{(s-2)}{\left[(s-2)^2+9\right]^2} + \frac{s-4}{(s-2)^2+9}$$

b) On écrit

$$\frac{s-4}{(s-2)^2+9} = \frac{s-2}{(s-2)^2+3^2} - \frac{2}{3}\frac{3}{(s-2)^2+3^2} = \mathcal{L}(e^{2t}\cos(3t)H(t)) - \mathcal{L}\left(\frac{2}{3}e^{2t}\sin(3t)H(t)\right)$$

Donc

$$(*) \quad \frac{s-4}{(s-2)^2+9} = \mathcal{L}\left(e^{2t}\cos(3t)H(t) - \frac{2}{3}e^{2t}\sin(3t)H(t)\right)$$

D'autre part

$$\frac{s-2}{\left((s-2)^2+9\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-2)^2+9}\right) = -\frac{1}{6}\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{(s-2)^2+3^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}(e^{2t}\sin(3t)H(t))\right)(s) = -\frac{1}{6}\mathcal{L}\left((-t)e^{2t}\sin(3t)H(t)\right)$$

donc

$$(**) \quad \frac{s-2}{\left[(s-2)^2+9\right]^2} = \mathcal{L}\left(\frac{t}{6}e^{2t}\sin(3t)H(t)\right)(s)$$

De a), $(*)$ et $(**)$ on déduit

$$y(t) = e^{2t}\left[\cos(3t) - \frac{2}{3}\sin(3t) + \frac{t}{6}\sin(3t)\right] \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Exo 2.

I) Ia) $f = 0$ si $t < 0$ et $f \in C^1([0, \infty[) \Rightarrow f \in \mathcal{L}_+$

avec (3) et (4) $\Rightarrow$ $f, f' \in \mathcal{L}a$.

Avec un théorème de cours on a $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0+)$

Ib) On va montrer :

(1)' $\lim_{s \in \mathbb{R}, s \to \infty} \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = 0$

On applique le ~~T~~ théo. conv. dominée de Lebesgue.

$\forall t \in]0, \infty[$ on a $f'(t) e^{-st} \to 0$ si $s \to +\infty$

si ~~s~~ $s \geq \alpha$ on a ~~$|f'(t) e^{-st}|$~~ $\leq$ ~~$|f'(t) e^{-\alpha t}|$~~ $|f'(t)| e^{-\alpha t} \in L^1(]0, \infty[)$ par (4).

$|f'(t) e^{-st}| = |f'(t)| e^{-st} \leq |f'(t)| e^{-\alpha t}$

On a ~~et~~ obtenu (1)'

On utilisant l'égalité de Ia) on obtient

$$\lim_{s \in \mathbb{R}, s \to +\infty} s\mathcal{L}(f)(s) = f(0+)$$

II)

IIa) ~~g se prolonge~~ $g|]0, +\infty[$ ~~se prolonge par continuité~~ et g continue sur $]0, \infty[$.

On a $\lim_{t \to 0+} g(t) = g(0) = 1$ $g|[0, \infty[$ est continue sur $[0, +\infty[$.

donc ~~$g \in C([0, \infty[)$~~

si $t > 0$ on a $g'(t) = \frac{(\cos t) t - \sin t}{t^2}$

Il faut montrer qu'il existe $\lim_{t \to 0+} g'(t)$ en $t = 0$

On utilise le developpement limité

$\cos t = 1 + o(t)$ et $\sin t = t + o(t^2)$

$g'(t) = \frac{(1 + o(t)) t - t - o(t^2)}{t^2} = \frac{t - t + o(t^2)}{t^2} = \frac{o(t^2)}{t^2} \xrightarrow{t \to 0^+} 0$

Comme g' est cont sur $]0, \infty[$ alors $g'|[0, \infty[$ est cont sur $[0, +\infty[$

donc $g|[0, \infty[$ est C^1 sur $[0, +\infty[$.

IIb) g est continue sur $]0, \infty[$ avec en plus

$\lim_{t \to 0+} g(t) = 1$ et $\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0$

Alors g est bornée sur $]0, +\infty[$

g' est continue sur $]0,+\infty[$ avec en plus

$\lim_{t \to 0+} g'(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} g'(t) = 0$

Alors g' est bornée sur $]0,+\infty[$

Il existe donc $M, M_1 \geq 0$ t.q

$|g(t)| \leq M \quad \forall t>0$

$|g'(t)| \leq M_1 \quad \forall t>0$

On déduit immédiatement (5), (6) pour tout $\alpha > 0$.

II c) la partie I s'applique ici avec $f=g$.

On en déduit

$$\lim_{s\in\mathbb{R}, s\to\infty} s\mathcal{L}(g)(s) = g(0+) = 1$$

Exo 3.

a) La fonction $x\in\mathbb{R} \to \sin(\pi x) - x$ $\overset{\text{note}}{=} f(x)$

est continue sur $\mathbb{R}$ donc dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Alors ~~c'est~~ on a la distribution regulière associée à f notée T_f

b) c'est $2\delta_{-2} + 3\delta_1 - 2\delta_4$ combinaison linéaire des distributions de Dirac donc distribution

c) $\varphi'(0) = \langle \delta, \varphi' \rangle = -\langle \delta', \varphi \rangle$

$\varphi'(1) = \langle \delta_1, \varphi' \rangle = -\langle \delta_1', \varphi \rangle$ } distributions

C'est donc combinaison linéaire de δ' et δ_1'

donc distribution

(On peut aussi montrer la linéarité de l'application

$\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow 2\varphi'(0)+\varphi'(1) \in\mathbb{R}$)

d) On note $g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \ln(|x|)$

g est definie p.p sur $\mathbb{R}$

On va montrer que $g\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ donc on a ici

la distribution regulière associée à g

Soit K compact arbitraire $K \subset \mathbb{R}$
On pose $a = \min K$ et $b = \max K$
donc $K \subset [a, b]$

Considérons $\alpha = \min\{a, -1\}$
$\beta = \max\{b, 1\}$
$K_1 = [\alpha, \beta]$

On a : $K \subset K_1$ et $[-1, 1] \subset K_1$
On va montrer $\int_{K_1} |\ln(|x|)| dx < \infty$ ce qui va montrer le résultat voulu.
~~donc~~

$\int_K |\ln(|x|)| dx < \infty$

Rappel: ~~$\ln(|x|) \cdot |x|^{1/2}$~~ $|x|^{\frac{1}{2}} \ln(|x|) \longrightarrow 0$ si $x \to 0$

Alors $\exists \delta \in]0, 1[$ t.q. $\forall x \in]-\delta, \delta[$.
$|x|^{\frac{1}{2}} |\ln(|x|)| \leq 1$ $\forall x \in]-\delta, \delta[$

$\Rightarrow |\ln(|x|)| \leq \frac{1}{x^{1/2}}$

Par critère de Rieman $\Rightarrow$
$\int_{-\delta}^{\delta} |\ln(|x|)| dx < +\infty$

En plus la fonction $x \longrightarrow \ln(|x|)$ est continue sur le compact $K \setminus (]-\delta, \delta[)$ donc
$\int_{\alpha}^{-\delta} |\ln(|x|)| dx + \int_{\delta}^{\beta} |\ln(|x|)| dx < \infty$
Ceci donne le résultat.

<u>Exo 4.</u>

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$\langle S_n, \varphi \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} h \sin(\pi x_i) \delta_{x_i}, \varphi \rangle = ~~h \sum_{i=1}^{n} \sin~~ \ = h \sum_{i=1}^{n} \sin(\pi x_i) \varphi(x_i)$

$= h \sum_{i=1}^{n} \sin(\pi x_i) \langle \delta_{x_i}, \varphi \rangle = h \sum_{i=1}^{n} \sin(\pi x_i) \varphi(x_i)$

C'est une somme de Rieman associée à la fonction continue sur $[a, b]$. Alors fonction
$x \in]a, b[\longrightarrow \sin(\pi x) \varphi(x)$

$\langle S_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \to \infty} \int_a^b \sin(\pi x) \varphi(x) dx = \langle S, \varphi \rangle$

avec $S = T_{\sin(\pi x)}$ distrib régulière assoc à $x \to \sin(\pi x)$

Donc $S_n \xrightarrow{n \to \infty} S$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$