Polytech Lyon, MAM3A, 2021-2022

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 1 - octobre 2021

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

a) Soit $f_1 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_1(x) = \frac{x^3}{x^2+1} e^{-2x}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Montrer que f_1 est intégrable Lebesque.

b) Soit $f_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_2(x) = \frac{\sin^2(2x)}{x^{5/2}(2x+3)}, \quad \forall\, x > 0.$$

Montrer que f_2 est intégrable Lebesque.

c) Soit $f_3 :]0, 2[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_3(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}, \quad \forall\, x \in\,]0, 2[.$$

Montrer que f_3 n'est pas intégrable Lebesgue.

d) Soit $f_4 :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_4(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}, \quad \forall\, x \in\,]1, +\infty[.$$

Montrer que f_4 n'est pas intégrable Lebesgue.

Exercice 2.

On se donne a_1, a_2 deux nombres réels strictement positives et on considère l'ellipse suivante

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1\}.$$

On cosidère l'ensemble ouvert borné suivant:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} < 1\}.$$

(remarquer que la frontière de Ω est Γ). On se propose de calculer l'aire de Ω, c'est à dire calculer $\lambda_2(\Omega)$, en calculant une intégrale de Lebesgue appropriée. On propose le changement de variable suivant

$$x_1 = a_1 \rho \cos\theta \quad \text{et} \quad x_2 = a_2 \rho \sin\theta, \quad (\rho, \theta) \in\,]0, 1[\, \times\,]0, 2\pi[.$$

On introduit alors l'application $\varphi :]0, +\infty[\, \times\,]0, 2\pi[\, \mapsto \mathbb{R}^2$ donnée par

$$(\rho, \theta) \mapsto (a_1 \rho \cos\theta,\ a_2 \rho \sin\theta)$$

et nous admettons que φ est injective et que

$$\varphi(]0,+\infty[\times]0,2\pi[) = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,+\infty[\times\{0\}).$$

a) Montrer que φ est une bijection de l'ouvert $U =]0,1[\times]0,2\pi[$ dans l'ouvert $V = \Omega \setminus ([0,a_1[\times\{0\})$.

b) Montrer que Ω et V ont la même mesure de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$.

c) Ecrire d'abord $\lambda_2(V)$ comme une intgrale sur V, l'écrire ensuite comme une intégrale sur U (en utilisant le théorème de changement des variables) et calculer cette intégrale en utilisant la formule de Fubini 2D. En déduire $\lambda_2(\Omega)$.

Exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert. On se donne $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction bornée (donc $f \in L^\infty(\Omega)$) et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable Lebesgue (donc $g \in L^1(\Omega)$). On se donne aussi une suite réelle $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que

$$\eta_k > 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \eta_k \to\ 0 \text{ pour } k \to +\infty.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on considère la fonction $h_k : \Omega \to \mathbb{R}$ donnée par

$$x \ \mapsto\ h_k(x) = f(x)g(x)\frac{\eta_k}{(f^2(x)+\eta_k)^{3/2}}$$

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction h_k est intégrable Lebesgue.
Indication: faire une minoration appropriée de $(f^2(x)+\eta_k)^{3/2}$.

b) Montrer que

$$\int_\Omega h_k(x)\,dx \ \to\ 0 \quad \text{pour} \quad k \to +\infty.$$

Indication: utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue; considérer deux cas: $f(x) = 0$ ou $f(x) \neq 0$.