Polytech Lyon, MAM3A, 2021-2022

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 2 - novembre 2021

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

On considère la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par

$$z \in \mathbb{C} \ \mapsto \ f(z) = (Re(z))^2$$

(c'est à dire: $f(z) = x^2$ si $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$). On se propose de montrer que f n'est dérivable nulle part sur $\{z \in \mathbb{C},\ Re(z) \neq 0\}$.

Considérons alors $z \in \mathbb{C}$ fixé avec $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$. Pour tout $h \in \mathbb{C}$ avec $h \neq 0$ on pose

$$E(h) = \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

a) Montrer que si $h = u + iv$ avec $u, v \in \mathbb{R},\ (u, v) \neq (0, 0)$ alors

$$E(h) = \frac{u(u+2x)}{u+iv}.$$

b) Calculer

$$\lim_{k \to +\infty} E\left(\frac{1}{k}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{k \to +\infty} E\left(\frac{i}{k}\right).$$

c) Montrer que f n'est pas dérivable en z.

Exercice 2.

Dans un repère $(Oxyz)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ on considère la paramétrisation C^1 donnée par $([0, 2\pi],\ \gamma)$ avec

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a + r\cos t \\ 0 \\ r\sin t \end{pmatrix}, \quad \forall\, t \in [0, 2\pi]$$

avec $a, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < a$. Nous notons par Γ la courbe associée à γ, c'est à dire $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$.

Nous notons par S la surface de révolution de la courbe Γ autour de l'axe vertical Oz (cette surface s'appelle **tore de révolution**; c'est un sorte de tube courbé refermé sur lui-même, ou "bouée de sauvetage").

Nous construisons la nappe paramétrée de support S suivante: $(\overline{D}, \varphi)$ avec $D =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$ et $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\varphi(\theta, t) = \begin{pmatrix} (a + r\cos t)\ \cos\theta \\ (a + r\cos t)\ \sin\theta \\ r\sin t \end{pmatrix}, \quad \forall\ (\theta, t) \in \overline{D}.$$

a) Qui est la courbe Γ? Montrer que Γ est dans la partie $x \geq 0$ du plan $y = 0$ de l'espace $\mathbb{R}^3$.
b) Calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Montrer que

$$\left\| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)(\theta, t) \right\| = r(a + r\cos t), \quad \forall\, (\theta, t) \in \overline{D}.$$

c) Trouver les points réguliers de φ et calculer, pour ces points réguliers, le vecteur normal ν à la nappe φ.
d) Calculer l'aire de φ (ou de S).
e) Trouver l'intersection de S avec le plan $z = \frac{r}{2}$.
f) Trouver l'intersection de S avec le cylindre d'équation

$$x^2 + y^2 = (a - r)^2.$$

Exercice 3.
On se donne un repère orthonormé (Oxy) dans le plan et on considère une roue de rayon $r > 0$ qui roule sans glisser à la vitesse constante r sur l'axe horizontale (Ox).
On se propose de donner une paramétrisation de la courbe décrite par le point de la roue qui se trouve à l'origine O du repère au moment initial $t = 0$ (cette courbe s'appelle **cycloïde** de rayon r).
Notons pour tout temps $t \geq 0$ par $C(t)$ la position du centre de la roue, par $P(t)$ le point de contact avec l'axe (Ox) et par $M(t)$ le point de la roue qui coïncide avec l'origine O au temps $t = 0$.
a) Donner les coordonnées de $C(t)$.
b) Montrer que que l'angle orienté entre le vecteur $\overrightarrow{C(t)M(t)}$ et le vecteur $\overrightarrow{C(t)P(t)}$ est égal à t.
c) Trouver l'angle orienté entre le vecteur $\overrightarrow{C(t)M(t)}$ et l'axe (Ox) et en déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{C(t)M(t)}$.
d) En déduire les coordonnes de $M(t)$ et ensuite une paramétrisation de la cycloïde avec le temps t comme paramètre; on supposera ici $t \in [0, 2\pi]$.
e) Montrer que la longueur de cette courbe est donnée par $r\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2}\, dt$. Calculer cette longueur.