Polytech Lyon, MAM3A, 2021-2022

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 3 - janvier 2022

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

On se propose de trouver la fonction $y \in C^2([0,+\infty[)$ avec $y, y', y'' \in \mathcal{L}_a$, solution de l'équation différentielle

(1) $$y'' - 4y' + 13y = e^{2t}\cos(3t), \quad \forall\, t \in [0,+\infty[$$

avec conditions initiales

(2) $$\begin{cases} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0. \end{cases}$$

Nous considérons que toutes les fonctions qui interviennent dans le problème se prolongent par 0 sur $]-\infty, 0[$.

a) On pose $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$ définie sur $\{s \in \mathbb{C},\ Re(s) > \xi_a(y)\}$. Montrer qu'on a

$$Y(s) = \frac{s-2}{[(s-2)^2+9]^2} + \frac{s-4}{(s-2)^2+9}, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}, \quad \text{avec } Re(s) > \xi_a(y).$$

b) Trouver la solution y de (1) - (2).

Exercice 2.

Partie I.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$f(t) = 0,\ \forall\, t < 0$ et
La restriction de f sur $[0,+\infty[$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.
Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

(3) $$\int_0^\infty |f(t)| e^{-\alpha t}\, dt < +\infty \qquad \text{et}$$

(4) $$\int_0^\infty |f'(t)| e^{-\alpha t}\, dt < +\infty.$$

Ia) Montrer que les fonctions f et f' appartiennent à $\mathcal{L}_a$ et en plus

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0+), \quad \forall\, s \in \mathbb{C},\ Re(s) > \alpha.$$

Ib) Montrer qu'on a

$$\lim_{s \in \mathbb{R}, s \to +\infty} s\mathcal{L}(f)(s) = f(0+).$$

Indication: utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Partie II (Application)

On se donne la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

IIa) Montrer que la restriction de g sur $[0, +\infty[$ est une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

IIb) Montrer que les fonctions g et g' sont bornées sur $]0, +\infty[$. En déduire que pour tout $\alpha > 0$ on a

(5)
$$\int_0^{\infty} |g(t)| e^{-\alpha t}\, dt < +\infty \qquad \text{et}$$

(6)
$$\int_0^{\infty} |g'(t)| e^{-\alpha t}\, dt < +\infty.$$

IIc) Calculer

$$\lim_{s \in \mathbb{R}, s \to +\infty} s\mathcal{L}(g)(s).$$

Exercice 3.

Pour chacune des applications suivantes de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, précisez (en justifiant) si elles sont bien définies et si elles sont des distributions:

a) $\varphi \;\to\; \int_{\mathbb{R}} (\sin(\pi x) - x)\, \varphi(x)\, dx$

b) $\varphi \;\to\; 2\varphi(-2) + 3\varphi(1) - 2\varphi(4)$

c) $\varphi \;\to\; 2\varphi'(0) + \varphi'(1)$

d) $\varphi \;\to\; \int_{\mathbb{R}} \ln(|x|)\, \varphi(x)\, dx$

Exercice 4.

Soit $\Omega =]a, b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{b-a}{n}$. On considère la discrétisation uniforme suivante de Ω:

$$x_i = a + ih, \quad i \in [[1, n]].$$

On considère la distribution $S_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ suivante:

$$S_n = h\left[\sin(\pi x_1)\, \delta_{x_1} \;+\; \sin(\pi x_2)\, \delta_{x_2} \;+\; \cdots \;+\; \sin(\pi x_n)\, \delta_{x_n}\right]$$

où nous rappelons que δ_{x_i} désigne la distribution de Dirac en x_i.

Montrer que S_n admet une distribution limite $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pour $n \to +\infty$ et trouver cette distribution S.