Corrigé Partiel 1 MMY 2022-2023

Exo 1.

a) $f_1(x) = (x^2+3x+2)\, e^{-x}\, e^{-x} = h_1(x)\, e^{-x}$

où on note $h_1 : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow h_1(x) = (x^2+3x+2)\, e^{-x}$

On a:
- h_1 est continue sur $[0, +\infty[$
- $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2+3x+2)\, e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x+2}{e^{x}} = 0$

Alors h_1 est bornée, donc

$\exists\, c_1 \geq 0$ tel que $|h_1(x)| \leq c_1 \quad \forall x \in [0, +\infty[$.

Alors $|f_1(x)| \leq c_1 e^{-x} \quad \forall x \geq 0$

La fonction $x \longrightarrow c_1 e^{-x}$ est i.L sur $[0, +\infty[$ donc

f_1 est i.L sur $[0, +\infty[$.

b) $f_2(x) = \dfrac{\sin^2(4x)}{x^2}\, \dfrac{1}{3x+2}\, \dfrac{1}{x^{1/4}}$ (car $9 = 2 + \frac{1}{4}$)

$= h_2(x)\, \dfrac{1}{x^{1/4}}$ où on note

$h_2 :]0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad h_2(x) = \dfrac{\sin^2(4x)}{x^2}\, \dfrac{1}{3x+2}$

$x \longrightarrow$ ~~$\dfrac{\sin^2(4x)}{x^2}\, \dfrac{1}{3x+2}$~~

On a:
- h_2 est continue sur $]0, 2]$
- $\lim\limits_{x\to 0_+} h_2(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} \underbrace{\left(\dfrac{\sin(4x)}{x}\right)^2}_{\to 4} \underbrace{\dfrac{1}{3x+2}}_{\to 2} = 8$

Alors h_2 ~~est~~ se prolonge par continuité sur $[0, 2]$

donc h_2 bornée : $\exists\, c_2 \geq 0$ tel que $\forall x \in]0, 2]$

$|h_2(x)| \leq c_2$

On en déduit : $\forall x \in]0, 2]$

$|f_2(x)| \leq c_2 \dfrac{1}{x^{1/4}}$

Comme la fonction $x \longrightarrow \dfrac{c_2}{x^{1/4}}$ est i.L sur $]0, 2]$

alors f_2 est i.L sur $]0, 2]$.

c) $f_3(x) = g_3(x)\, \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in]1, +\infty[$

avec $g_3 :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow g_3(x) = \dfrac{x^2-3x+5}{x^2+2}$, $\forall x \in [1, +\infty[$

Nous avons
$\lim\limits_{x \to \infty} g_3(x) = 1$. Alors il existe $M > \cancel{1}$ tel que

$g_3(x) \geq \dfrac{1}{2}$, $\forall x \geq M$

On en deduit

$|f_3(x)| \geq \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\forall x \geq M$.

Comme la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est non i.L sur $[M, +\infty[$ alors

f_3 est non i.L sur $[M, +\infty[$
donc f_3 est non i.L sur $[1, +\infty[$.

d) $f_4(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} \dfrac{1}{x} = h_4(x) \dfrac{1}{x}$

où on pose $h_4 :]0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow h_4(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$, $\forall x \in]0, 3]$

Nous avons
$\lim\limits_{x \to 0_+} h_4(x) = 2$ (car on a les developpements limitées $e^x = 1 + x + o(x)$; $e^{-x} = 1 - x + o(x)$
donc $\dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = \dfrac{\cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1} + x - o(x)}{x} \longrightarrow 2$)

Alors il existe $\delta \in]0, 3]$ tel que

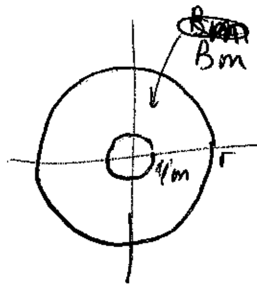
$h_4(x) \geq 1$, $\forall x \in]0, \delta]$

On en deduit

$|f_4(x)| \geq \dfrac{1}{x}$ $\forall x \in]0, \delta]$

Comme la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$ est non i.L. sur $]0, \delta]$ donc
alors f_4 est non i.L sur $]0, \delta]$
f_4 est non i.L sur $]0, 3]$.

Exercice 2.



a) Si $x \in B_m$ alors

$\|x\| \geq \frac{1}{m} \Rightarrow$ donc $\frac{1}{\|x\|} \leq m$

donc $\underbrace{\frac{1}{\|x\|^\alpha}}_{= f(x)} \leq m^\alpha$

Alors f est borné sur l'ensemble borné B_m

donc f est i-L sur B_m.

b) $B_m = V_m \cup D_m$ avec $V_m \cap D_m = \emptyset$

Alors $\int_{B_m} f(x)\,dx = \int_{V_m} f(x)\,dx + \int_{D_m} f(x)\,dx$

Comme $\lambda_n(D_m) = 0$ alors $\int_{D_m} f(x)\,dx = 0$. Donc

$\int_{B_m} f(x)\,dx = \int_{V_m} f(x)\,dx$

Ensuite $J_\varphi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$ et $\det(J_\varphi(\rho,\theta)) = \rho$

$\det(J_\varphi(\rho,\theta)) > 0 \quad \forall (\rho,\theta) \in U_m$ (car $\rho > \frac{1}{m}$)

Alors on peut écrire (en utilisant la formule de chang. variables)

$I_m \cancel{\int_{V_m} f(x)\,dx} = \int_{U_m} (f \circ \varphi)(\rho,\theta)\, |\det J_\varphi(\rho,\theta)|\, d\rho\, d\theta$

$= \int_{U_m} \frac{1}{\|\varphi(\rho,\theta)\|^\alpha}\, \rho\, d\rho\, d\theta$. Comme $\|\varphi(\rho,\theta)\| = \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} = \rho$ alors

c)

$I_m \cancel{\int_{V_m} f(x)\,dx} = \int_{U_m} \frac{1}{\rho^\alpha}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{U_m} \frac{1}{\rho^{\alpha-1}}\, d\rho\, d\theta =$

$= \int_{1/m}^{r} \int_0^{2\pi} \rho^{1-\alpha}\, d\rho\, d\theta.$

On utilise la formule de Fubini

$I_m \cancel{\int_{V_m} f(x)\,dx} = \int_{1/m}^{r} 2\pi \rho^{1-\alpha}\, d\rho = \left[2\pi \frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{1/m}^{r}$

donc

$I_m \cancel{\int_{V_m} f(x)\,dx} = \frac{2\pi}{2-\alpha}\left(r^{2-\alpha} - \left(\frac{1}{m}\right)^{2-\alpha} \right)$

d) ~~On a~~ les ensembles B_m satisfont

- $B_m \subset B$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0$
- $B_m \subset B_{m+1}$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0$
- $\bigcup_{m=m_0}^{\infty} B_m = B$

f est i.L sur B_m, $\forall m \geq m_0$

Alors ~~f est~~ f est i.L sur B ssi $\lim_{m\to\infty} I_m < \infty$ (car $f \geq 0$)

Mais $\lim_{m\to\infty} I_m = \frac{2\pi}{2-\alpha} r^{2-\alpha} < \infty$ (car $\alpha < 2$)

donc f est i.L sur B_m

En plus $\int_{B(0,r)} f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} I_m = \frac{2\pi}{2-\alpha} r^{2-\alpha}$

Exercice 3.

a) On pose $g : [0, \infty[$, $g(y) = \ln(1+y^\alpha) - \alpha y$

g est C^1 sur $[0, \infty[$.

$g'(y) = \frac{1}{1+y^\alpha} \alpha y^{\alpha-1} - \alpha = \frac{\alpha}{1+y^\alpha}\left(y^{\alpha-1} - y^\alpha - 1\right)$

- Si $y \geq 1$ alors $y^{\alpha-1} - y^\alpha = y^{\alpha-1}(1-y) \leq 0$. Alors $y^{\alpha-1} - y^\alpha - 1 < 0$
- Si $0 \leq y \leq 1$ alors $y^{\alpha-1} - 1 \leq 0$ (car $\alpha - 1 > 0$). Alors $y^{\alpha-1} - y^\alpha - 1 \leq 0$

Alors $g'(y) \leq 0$ $\forall y \geq 0$ donc g decroissante $\forall y \geq 0$ $g(y) \leq 0$

Alors $g(y) \leq g(0) = 0$

ce qui montre le resultat

b) On utilise a) avec $y = \frac{f(x)}{k}$. car ≥ 0

$\left|\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{k}\right)^\alpha\right)\right| = \underbrace{\ln\Big(\underbrace{1+\left(\frac{f(x)}{k}\right)^\alpha}_{\geq 1}\Big)}_{\geq 0}$

donc

$\left|\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{k}\right)^\alpha\right)\right| \leq \alpha \frac{f(x)}{k}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$

$|f_k(x)| \leq \alpha f(x)$

Comme $f \geq 0$ et f i.L. alors f_k est i.L.

c) Calculons $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$.

Mais

$$f_k(x) = k\left[\left(\frac{f(x)}{k}\right)^\alpha + \left(\frac{f(x)}{k}\right)^\alpha o\left(\left(\frac{f(x)}{k}\right)^\alpha\right)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{(f(x))^\alpha}{k^{\alpha-1}}}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \text{ car } \alpha>1} + \underbrace{\frac{(f(x))^\alpha}{k^{\alpha-1}}}_{\to 0} \underbrace{o\left(\left(\frac{f(x)}{k}\right)^\alpha\right)}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

donc $f_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(on note $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$g = 0$ constant
$f_k(x) \longrightarrow g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Comme

$|f_k(x)| \leq \underbrace{\alpha f(x)}_{\text{i.L et } \geq 0}$

Alors en utilisant le théorème de conv. dominée de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$