Corrigé Partiel 3 - 1 - 2022-2023 (MAM)

Exo 1.

a) On applique $\mathcal{L}$ ~~Hoo~~ ~~à (1)~~ à l'équation (1).
On obtient en tenant compte de (2) $(y(0+)=y(0)=0)$

$$\frac{s}{2}Y(s) - 0 + Y(s) = Y(s)\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s}$$

(car $\int_0^t \sin(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = y * u$ avec $u(t)=\sin t$
et $\mathcal{L}(y*u) = \mathcal{L}(y)\,\mathcal{L}(u) = Y(s)\frac{1}{s^2+1}$)

On a alors

$$(1)' \quad Y(s)\left(\frac{s}{2}+1-\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s}$$

Nous avons

$$\frac{s}{2}+1-\frac{1}{s^2+1} = \frac{s+2}{2} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{(s+2)(s^2+1)-2}{2(s^2+1)} =$$

$$= \frac{s^3+2s^2+s+\cancel{2}-\cancel{2}}{2(s^2+1)} = \frac{s(s^2+2s+1)}{2(s^2+1)} = \frac{s(s+1)^2}{2(s^2+1)}$$

D'autre part

$$\frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s} = \frac{s^2-2(s^2+1)}{s(s^2+1)} = \frac{-s^2-2}{s(s^2+1)}$$

On obtient alors de (1)' ;

$$Y(s)\,\frac{s(s+1)^2}{2(\cancel{s^2+1})} = -\frac{s^2+2}{s(\cancel{s^2+1})}$$

ce qui nous donne

$$Y(s) = -\frac{2(s^2+2)}{s^2(s+1)^2}$$

b) On multiplie ~~par~~ (3) par s^2 et ~~on fait~~ on prend $\lim_{s\to 0}$ ~~faire~~ ; ceci donne $b=-4$

On multiplie (3) par $(s+1)^2$ et faire $\lim_{s\to -1}$, ce qui donne $d=-6$

On multiplie (3) par s. et faire $\underset{s\in\mathbb{R}}{s\to\infty}$, ce qui donne $a+c=0$

Prendre $s = 1$ en (3) ce qui donne

$$\frac{-2\cdot 3}{1\cdot 4} = a + b + \frac{c}{2} + \frac{d}{4}$$ c'est à dire

$$a - 4 + \frac{c}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$ donc

$$a + \frac{c}{2} = 4$$

On a donc $\begin{cases} a + c = 0 \\ a + \frac{c}{2} = 4 \end{cases} \underset{a=-c}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a + c = 0 \\ -c + \frac{c}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$c = -8$
$a = 8$

On ~~a donc~~ obtient

$a = 8$; $b = -4$; $c = -8$; $d = -6$

e) On a donc

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{8}{s} - \frac{4}{s^2} + \frac{8}{s+1} - \frac{6}{(s+1)^2}$$

$$\frac{1}{s^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(H)(s) = \mathcal{L}(t\,H(t))(s)$$

$$\frac{1}{(s+1)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(e^{-t}H(t))(s) = \mathcal{L}(t\,e^{-t}H(t))(s)$$

Donc

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}\left(8H(t) - 4t\,H(t) - 8e^{-t}H(t) - 6t\,e^{-t}H(t)\right)$$

ce qui donne

$$y(t) = \left(8 - 4t - 8e^{-t} - 6t\,e^{-t}\right)H(t)$$

Si on restreint à $t \geq 0$ on a

$$y(t) = 8 - 4t - 8e^{-t} - 6t\,e^{-t}$$

Exo 2.

a) C'est $\varphi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)\,dx$

avec $u(x) = \cos(\pi x) - x^2$, ~~$\forall x \in \mathbb{R}$~~

u est continue donc $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Alors l'application n'est autre que T_u qui est une distribution sur $\mathbb{R}$ (c'est la distribution régulière associée à u)

b) C'est $2\delta_{-2} - 3\delta$

C'est une combinaison linéaire des distributions de Dirac sur R, donc c'est une distribution sur R

c) C'est $2\delta_1 + T_v$

avec $v(x) = xe^x \quad \forall x \in R$

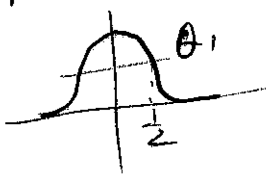
v est continue donc $v \in L_{loc}^1(R)$ donc $T_v \in \mathcal{D}'(R)$

Notre application est une combinaison linéaire des distributions donc c'est une distribution

d) Soit $\varphi(x) = \theta_1(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$

θ_1 = l'exemple d'élément $\in \mathcal{D}(R)$ vu en cours

Montrons que la fonction $x \longrightarrow \frac{\theta_1(x)}{x^2}$ n'est pas i.L sur R



Comme θ_1 est décroissante sur $[0, \infty[$

alors $\theta_1(x) \geq \theta_1\left(\frac{1}{2}\right) \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$

Alors $\int_R \frac{|\theta_1(x)|}{x^2} dx = \int_{-1}^{1} \frac{\theta_1(x)}{x^2} dx \geq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\theta_1(x)}{x^2} dx$

$\geq \theta_1\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} dx$

Par le critère de Rieman on sait que

$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^2} dx = +\infty$

Alors $\int_R \frac{|\theta_1(x)|}{x^2} dx = +\infty$

Donc l'application de d) n'est pas bien définie, elle ne peut pas être une distribution sur R.

Exercice 3.

a)
La fonction $x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x+\frac{1}{n})$ est continue, comme composée entre la fonction continue f et la fonction continue $x \longrightarrow x+\frac{1}{n}$.
C'est pareil pour la fonction
$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x-\frac{1}{n})$$

Alors g_n est une fonction continue.
Donc $g_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et g_n peut être vue comme une distribution (c'est T_{g_n})

b) $\langle T_{g_n}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\varphi(x)\,dx = n^2 \int_{\mathbb{R}} [f(x+\frac{1}{n}) + f(x-\frac{1}{n}) - 2f(x)]\varphi(x)\,dx$

$= n^2 \Big[\int_{\mathbb{R}} f(x+\frac{1}{n})\varphi(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} f(x-\frac{1}{n})\varphi(x)\,dx - 2\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \Big]$

Mais
$$\int_{\mathbb{R}} f(x+\tfrac{1}{n})\varphi(x)\,dx \underset{\substack{\text{chang. var.}\\ y = x+\frac{1}{n}}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\varphi(y-\tfrac{1}{n})\,dy \qquad dx = dy$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-\tfrac{1}{n})\varphi(x)\,dx \underset{\substack{\text{chang. var}\\ y = x-\frac{1}{n}}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\varphi(y+\tfrac{1}{n})\,dy$$

Alors
$$\langle T_{g_n}, \varphi \rangle = n^2 \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x-\tfrac{1}{n})\,dx + \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x+\tfrac{1}{n})\,dx$$
$$-2\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \Big)$$

Par linéarité de l'integrale on a le résultat

$\cancel{\langle T_{g_n}, \varphi \rangle = n^2 \int_{\mathbb{R}} f(x)}$

c) On a le developement de Taylor suivant

$$\varphi(x+\tfrac{1}{n}) = \varphi(x) + \tfrac{1}{n}\varphi'(x) + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n^2}\varphi''(x+\theta_1\tfrac{1}{n})$$
$0<\theta_1<1$

$$\varphi(x-\tfrac{1}{n}) = \varphi(x) - \tfrac{1}{n}\varphi'(x) + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n^2}\varphi''(x-\theta_2\tfrac{1}{n})$$
$0<\theta_2<1$

Alors

$$\langle T_{g_n},\varphi\rangle = n^2\int_R f(x)\Big[\cancel{\varphi(x)}+\cancel{\tfrac{1}{n}\varphi'(x)}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n^2}\varphi''(x+\theta_1\tfrac{1}{n}) + \cancel{\varphi(x)}-\cancel{\tfrac{1}{n}\varphi'(x)}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n^2}\varphi''(x-\theta_2\tfrac{1}{n}) - \cancel{2\varphi(x)}\Big]dx$$

$$= \int_R f(x)\Big(\tfrac{1}{2}\varphi''(x+\tfrac{\theta_1}{n}) + \tfrac{1}{2}\varphi''(x-\tfrac{\theta_2}{n})\Big)dx$$

On passe à la limite $n\to\infty$

On applique le Théorème de conv. dominée de Lebesgue:

- Pour x fixe $\frac{1}{2}\varphi''(x+\frac{\theta_1}{n}) + \frac{1}{2}\varphi''(x-\frac{\theta_2}{n}) \longrightarrow \frac{1}{2}\varphi''(x)+\frac{1}{2}\varphi''(x) = \varphi''(x)$

  (car φ'' est continue)

- La fonction φ'' s'annule en dehors d'un intervalle $[-M,M]$ avec $M>0$

  Alors les fonction $x\longrightarrow\varphi''(x+\frac{\theta_1}{n})$ et $x\longrightarrow\varphi''(x-\frac{\theta_2}{n})$ s'annulent en dehors de $[-M-1,M+1]$ (car $\frac{|\theta_1|}{n}<1$, $\frac{|\theta_2|}{n}<1$)

Alors

$$\langle T_{g_n},\varphi\rangle = \int_{[-M-1,M+1]} f(x)\Big(\tfrac{1}{2}\varphi''(x+\tfrac{\theta_1}{n}) + \tfrac{1}{2}\varphi''(x-\tfrac{\theta_2}{n})\Big)dx$$

Les fonction f ~~est bornée~~ et φ'' sont bornées sur le compact $[-M-1,M+1]$

donc $\exists\, A\geq 0$ t.q $\Big|f(x)\Big[\frac{1}{2}\varphi''(x+\frac{\theta_1}{n}) + \frac{1}{2}\varphi''(x-\frac{\theta_2}{n})\Big]\Big| \leq A$ $\forall x\in[-M-1,M+1]$

et A est i.L. sur le compact $[-M-1,M+1]$

Alors $\langle T_{g_n},\varphi\rangle \longrightarrow \int_R f\varphi''\,dx = \langle (T_f)'',\varphi\rangle$

donc $T_{g_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} (T_f)''$

d) $T=(T_f)''$; $(T_f)' = T_u$ avec $u=f'=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$ car f est continue

$(T_f)'' = T_{u'} + 2\delta = 2\delta$. Donc $T=2\delta$