Polytech Lyon, MAM3A, 2022-2023

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 1 - octobre 2022

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

a) Soit $f_1 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_1(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-2x}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Montrer que f_1 est intégrable Lebesque.

b) Soit $f_2 :]0, 2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_2(x) = \frac{\sin^2(4x)}{x^{9/4}(3x+2)}, \quad \forall\, x \in]0, 2]$$

Montrer que f_2 est intégrable Lebesque.

c) Soit $f_3 :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{(x^2+2)\sqrt{x}}, \quad \forall\, x \in]1, +\infty[.$$

Montrer que f_3 n'est pas intégrable Lebesgue.

d) Soit $f_4 :]0, 3] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_4(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}, \quad \forall\, x \in]0, 3].$$

Montrer que f_4 n'est pas intégrable Lebesgue.

Exercice 2.

Rappelons que $\|\cdot\|$ *représente la norme euclidienne.*

Soit $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2, \quad \|x\| < r\}$ le disque centré en 0 et de rayon $r > 0$ en $\mathbb{R}^2$ et $f : B(0, r) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}, \quad \forall\, x \in B(0, r) \setminus \{0\}$$

avec $0 < \alpha < 2$. Nous prolongeons cette fonction en $x = 0$ en lui donnant la valeur 0 (*attention: ce n'est pas un prolongement par continuité!*). Le but de l'exercice est de montrer que f est intégrable Lebesque sur $B(0, r)$ et de calculer $\int_{B(0,r)} f(x)\, dx$.

Pour cela on considère l'application $\varphi :]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\varphi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho \cos\theta \\ \rho \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \forall\, (\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$$

(passage en coordonnées polaires).

Rappelons que φ est bijective de $]0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

D'autre part soit $m_0 \in \mathbb{N}$ avec $m_0 > \frac{1}{r}$ et introduisons pour tout $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq m_0$ les ensembles $B_m = \{x \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{1}{m} < \|x\| < r\}$.

Dans la suite de l'exercice on va toujours supposer que $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq m_0$.
Remarquons que φ est une bijection entre $U_m =]\frac{1}{m},\, r[\, \times\,]0,\, 2\pi[$ et $V_m = B_m \setminus D_m$ où D_m est l'ensemble Lebesgue - négligeable défini par $D_m =]\frac{1}{m},\, r[\, \times \{0\}$.
a) Montrer que f est intégrable Lebesgue sur B_m (*Indication: on pourrait montrer que f est bornée sur B_m*).
Nous notons dans la suite $I_m = \int_{B_m} f(x)\, dx$.
b) En se rappelant que l'intégrale de Lebesgue sur un ensemble Lebesgue - négligeable est toujours égale à 0 montrer que

$$I_m = \int_{V_m} f(x)\, dx.$$

En utlisant la formule de changement des variables écrire cette dernière intégrale comme une intégrale sur U_m.
c) Utiliser la formule de Fubini pour calculer I_m.
d) Montrer que f est intégrable Lebesgue sur $B(0, r)$ et calculer $\int_{B(0,r)} f(x)\, dx$.

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

- f est intégrable Lebesgue sur $\mathbb{R}$
- $f(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1.$

On se donne aussi un nombre réel α avec $\alpha > 1$.
On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_k(x) = k \ln \left[1 + \left(\frac{f(x)}{k} \right)^{\alpha} \right], \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer l'inégalité

$$\ln(1 + y^{\alpha}) \leq \alpha y, \quad \forall\, y \geq 0.$$

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_k est intégrable Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que la limite suivante

$$\lim_{k \mapsto +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\, dx$$

existe et est finie; trouver cette limite.
Indication: Utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue et aussi le développement limité suivant:

$$\ln(1 + z) = z + z\epsilon(z)$$

où $\epsilon(z) \to 0$ pour $z \to 0$.