Polytech Lyon, MAM3A, 2022-2023

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel2 - décembre 2022

Durée 1h30 - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Problème 1.

On se donne une fonction $r : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $r \in C^1([0,1])$ et $r(t) > 0,\ \forall\, t \in [0,1]$. Nous considérons un repère $(Oxyz)$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ et on introduit la fonction $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Pour tout $t \in [0,1]$ fixé on considère dans le plan $\{z = t\}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ un cercle D_t de centre $\gamma(t)$ et rayon $r(t)$.

Nous considérons aussi la surface S dans $\mathbb{R}^3$ définie comme l'union de tous les cercles D_t pour $t \in [0,1]$ donc

$$S = \cup_{t\in[0,1]} D_t.$$

Une nappe paramétrée de cette surface S sera alors $(\overline{D}, \varphi)$ où $D =]0, 2\pi[\times]0,1[$ et $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ avec

$$\varphi(\theta, t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\theta \\ r(t)\sin\theta \\ t \end{pmatrix}, \quad \forall\, (\theta, t) \in \overline{D}.$$

On se donne aussi une fonction $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$V(x,y,z) = x + y^2 - z, \quad \forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Partie I.

Quelle est la surface S dans les cas particuliers suivants (il est conseillé de faire un dessein):

Ia) $r(t) = 2,\ \forall\, t \in [0,1]$?

Ib) $r(t) = t + 1,\ \forall\, t \in [0,1]$?

Partie II.

On supose dans cette partie qu'on a

$$r(t) = at + b, \quad \forall\, t \in [0,1]$$

avec $a \geq 0$ et $b > 0$ des constantes données.

IIa) Montrer que la nappe φ est régulière et montrer que le vecteur normal ν à la nappe est donné par

$$\nu = \nu(\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -a \end{pmatrix}, \quad \forall (\theta, t) \in \overline{D}.$$

IIb) Calculer l'aire de la surface S.
IIc) Calculer l'intégrale de surface de V sur φ, c'est à dire, calculer $\int_\varphi V(x,y,z)\,d\sigma$.
IId) On considère l'arc paramétré obtenu de φ en fixant $t=\frac{1}{2}$ et on notera par f cet arc paramétré. Donner le support de f et calculer $\int_f V(x,y,z)\,d\sigma$.

Problème 2.
On considère une fonction $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Il est facile de voir que h peut toujours s'écrire sous la forme

$$h(z)=f(x,y)+ig(x,y),\quad \forall\, z\in\mathbb{C}$$

avec $z=x+iy$ où $x,y\in\mathbb{R}$. Ici f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; $f(x,y)$ représente la partie réelle de $h(z)$ et $g(x,y)$ la partie imaginaire de $h(z)$.
a) Nous considérons ici le cas particulier $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ avec

$$h(z)=z^3,\ \ \forall\, z\in\mathbb{C}.$$

Qui sont les fonctions f et g dans ce cas?
b) On suppose ici $g(x,y)=0,\ \ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On suppose aussi que la fonction f est de classe C^1 et n'est pas une fonction constante. Montrer que h n'est pas une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Indication: utiliser le fait que le gradient de f ne peut pas être constant égal à 0 (car f n'est pas une fonction constante).