Polytech Lyon, MAM3A, 2022-2023

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 3 - janvier 2023

Durée 1h30 - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

On se propose de trouver la fonction $y \in C^1([0,+\infty[)$ avec $y, y' \in \mathcal{L}_a$, solution de l'équation integro-différentielle

$$\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\,d\tau + \cos t - 2, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{1}$$

avec condition initiale

$$y(0) = 0. \tag{2}$$

Nous considérons que toutes les fonctions qui interviennent dans le problème se prolongent par 0 sur $]-\infty, 0[$.

a) On pose $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$ définie sur $\{s \in \mathbb{C},\ Re(s) > \xi_a(y)\}$. Montrer qu'on a

$$Y(s) = \frac{-2(s^2+2)}{s^2(s+1)^2}, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}, \quad \text{avec } Re(s) > \xi_a(y).$$

b) Trouver des constantes $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que

$$\frac{-2(s^2+2)}{s^2(s+1)^2} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s+1} + \frac{d}{(s+1)^2}, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

c) Trouver la solution y de (1) - (2).

Exercice 2.

Pour chacune des applications suivantes de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, précisez (en justifiant) si elles sont des distributions:

a) $\varphi \to \int_{\mathbb{R}} (\cos(\pi x) - x^2)\,\varphi(x)\,dx$

b) $\varphi \to 2\varphi(-2) - 3\varphi(0)$

c) $\varphi \to 2\varphi(1) + \int_{\mathbb{R}} x e^x\,\varphi(x)\,dx$

d) $\varphi \to \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$

Problème 3.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$g_n(x) = n^2 \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) + f\left(x - \frac{1}{n}\right) - 2f(x) \right], \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction g_n peut être vue comme une distribution sur $\mathbb{R}$ (qu'on notera T_{g_n}).

b) Montrer qu'on a

$$\langle T_{g_n}\ ,\ \varphi\rangle \ =\ n^2\int_{\mathbb{R}} f(x)\left[\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)+\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right)-2\varphi(x)\right]dx,\quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\quad \forall\,n\in\mathbb{N}^*.$$

c) Montrer que T_{g_n} converge, pour $n\to+\infty$, vers une distribution limite $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ à trouver.

d) Application: Trouver T dans le cas particulier $f(x)=|x|,\ \forall\,x\in\mathbb{R}$.