Corrigé Partiel 1 MMI

Exo 1.

a) On écrit $f_1(x) = g_1(x) e^{-x}$ avec

$g_1(x) = (x^4 + 3x - 1) e^{-2x}$ $\quad g_1 : [0, \infty[\to \mathbb{R}$

~~Nous avons~~ La fonction g_1 est bornée sur $[0, \infty[$

(car g_1 est continue sur $[0, \infty[$ et $\lim_{x\to\infty} g_1(x) = 0 < \infty$)

Alors $\exists M \geq 0$ tel que

$|g_1(x)| \leq M \quad \forall x \geq 0$

Alors

$|f_1(x)| \leq M e^{-x}, \quad \forall x \geq 0.$

Comme la fonction ~~$x \to [0,\infty[$~~ $x \in [0, \infty[\to M e^{-x}$ est intégrable Lebesgue alors f_1 est i.L.

b) $f_2(x) = g_2(x) \dfrac{1}{x^{1/3}}$ avec

$g_2 :]0, 2] \to \mathbb{R}, \quad g_2(x) = \dfrac{\sin^2(2x)}{x^2(5x+2)}$

g_2 est une fonction continue sur $]0,2]$. En plus

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin^2(2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0_+} \frac{4\sin^2(2x)}{(2x)^2} = 4, \text{ donc}$$

$$\lim_{x\to 0_+} g_2(x) = \frac{4}{2} = 2.$$

Donc g_2 est une fonction bornée sur $]0,2]$

Alors ~~$\exists$~~ $\exists M \geq 0$ tel que

$|g_2(x)| \leq M, \quad \forall x \in]0,2]$ donc

$|f_2(x)| \leq \dfrac{M}{x^{1/3}} \quad \forall x \in]0,2].$

Comme la fonction $x \in]0,2] \to \dfrac{M}{x^{1/3}}$ est i.L alors f_2 est i.L.

c) Nous avons

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x + 5}{x^3 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{2}{x^3}\right)} = 1$$

On en déduit : $\exists \alpha \geq 1$ tel que $\forall x \geq \alpha$

$$\frac{x^3 - 3x + 5}{x^3 + 2} \geq \frac{1}{2}$$

Ceci donne

$f_3(x) \geq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad \forall x \geq \alpha.$

Comme la fonction $x \in [\alpha, +\infty[\longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ n'est pas i.L alors f_3 n'est pas i.L sur $[\alpha, +\infty[$ d'où f_3 n'est pas i.L sur $[1, +\infty[$.

d) Nous avons $\cancel{\lim_{x \to 0^+}}$ $\cancel{e^x + e^{-x}}$ $\quad e^x > 1 \quad \forall x \in]0, 3]$ donc

$e^x + e^{-x} > 1 \quad \forall x \in]0, 3]$

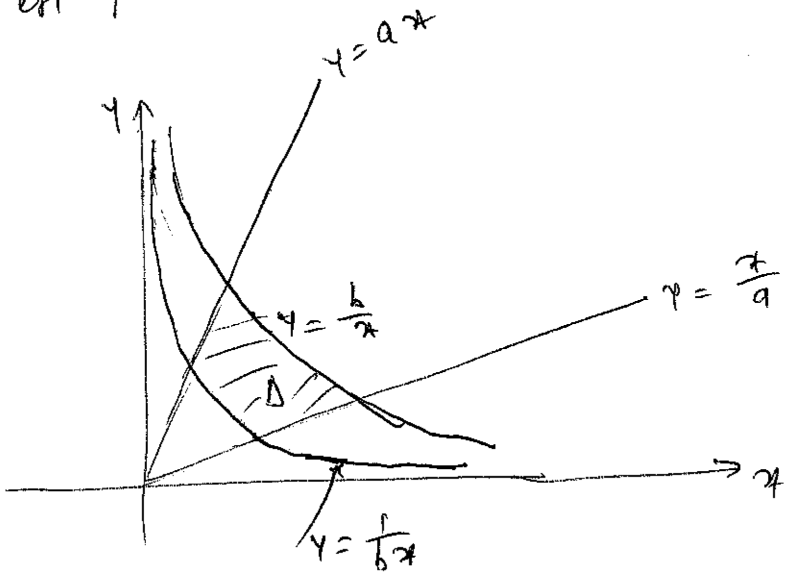
Alors

$f_4(x) > \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in]0, 3]$

Comme la fonction $x \in]0, 3] \longrightarrow \frac{1}{x^2}$ n'est pas i.L alors f_4 n'est pas i.L.

Exo 2.

a)



b) Soit $(x, y) \in \Delta$ fixé.
S'il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y) = \varphi(u, v)$ on a

$$\begin{cases} x = \frac{u}{v} \\ y = uv \end{cases}$$

On multiplie les 2 équations $\Rightarrow$

$xy = \frac{y}{x} u x = u^2$

Comme on ~~veut~~ a $xy > 0$ et on veut $u > 0$

alors forcement

(1) $u = \sqrt{xy}$

On remplace dans les 2-ème equation

$y = \sqrt{xy}\, v$ $\Rightarrow$

$v = \frac{y}{\sqrt{xy}}$ (car $x, y > 0$)

(2) $v = \sqrt{\frac{y}{x}}$

Donc il existe unique (u, v) avec $u > 0,\ v > 0$

tels que $(x, y) = \varphi(u, v)$, données par (1), (2)

Montrons que $(u, v) \in E$.

Comme $(x, y) \in D$ alors ~~on divise par x~~

$\frac{x}{a} < y < a x$ $\Leftrightarrow$ ~~$\frac{1}{a} < \frac{y}{x} < a$~~ on divise par u

$\frac{u}{v} \frac{1}{a} < u v < a \frac{u}{v}$ $\Leftrightarrow$

$\frac{1}{va} < v < \frac{a}{v}$ on multiplie par v $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{a} < v^2 < a$ $\Leftrightarrow$

(3) $\frac{1}{\sqrt{a}} < v < \sqrt{a}$,

D'autre part

$\frac{1}{bx} < y < \frac{b}{x}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{v}{bu} < u v < \frac{bv}{u}$ on multiplie par $\frac{u}{v}$ $\Leftrightarrow$

$\frac{1}{b} < u^2 < b$ $\Leftrightarrow$

(4) $\frac{1}{\sqrt{b}} < u < \sqrt{b}$

De (3), (4) $\Rightarrow$ $(u, v) \in E$

Alors φ est une bijection de E dans D.

c) Il est évident que φ est de classe C^1 sur U.
On calcule la matrice Jacobienne de φ.

$$J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{pmatrix}$$

$$\det(J_\varphi(u,v)) = \frac{u}{v} + \frac{u}{v} = \frac{2u}{v} > 0, \quad \forall (u,v) \in E.$$

On peut alors appliquer la formule de changement des variables

$$\lambda_2(D) = \int_D 1 \, dx\, dy = \int_E 1 \cdot |\det J_\varphi(u,v)| \, du\, dv$$

donc

$$\lambda_2(D) = \int_E \frac{2u}{v} \, du\, dv$$

d) Comme $E = \left]\frac{1}{\sqrt{b}}, \sqrt{b}\right[\times \left]\frac{1}{\sqrt{a}}, \sqrt{a}\right[$ alors

$$\int_E \frac{2u}{v} \, du\, dv = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{v} \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\sqrt{b}} 2u \, du \right) dv = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{v} \left[u^2\right]_{1/\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} dv$$

$$= \left(b - \frac{1}{b}\right) \left[\ln v\right]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} = \frac{b^2-1}{b} \left[\ln \sqrt{a} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right]$$

$$= \frac{b^2-1}{b} \ln a$$

Exo 3.

a) On suppose par absurd qu'il existe un ensemble $A \subset]1, \infty[$ avec $\lambda_1(A) > 0$ tel que

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in A.$$

On considère la suite des fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$g_n :]1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g_n(x) = e^{nx} f(x), \quad \forall x > 1.$$

On a

$g_n(x) \geq 0 \quad \forall\, \cancel{x} \ x > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \quad \forall\, x > 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(car la suite $e^{nx} = (e^x)^n$ est croissante en n)

Soit $g :]1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

(car si $x \notin A$ alors $f(x) = 0$ donc $g_n(x) = 0$)

Par le Théorème de Beppo-Levi on a

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^\infty g_n(x)\,dx = \int_1^\infty g(x)\,dx = \int_A \infty + \int_{]1,\infty[\setminus A} 0 = \infty$

$= \infty \cdot \mu(A) + 0 = +\infty$ (car $\mu(A) > 0$)

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^\infty g_n(x)\,dx = +\infty$

(contradiction avec l'hypothèse $\int_1^\infty g_n(x)\,dx \leq M$)

Donc $f(x) = 0$ p.p. $x \in]1, \infty[$.

b) On suppose par absurd ~~que~~ qu'il existe $y > 1$ tel que $f(y) \neq 0$. ~~Alo~~ On suppose $f(y) > 0$ (~~A~~ si $f(y) < 0$ le raisonnement est identique)

Par continuité de f il existe $\delta > 0$ tel que

$f(x) > \frac{f(y)}{2} \quad \forall x \in]y-\delta, y+\delta[$

Mais $\lambda_1(]y-\delta, y+\delta[) = 2\delta > 0$

donc $f(x) \neq 0$ sur l'ensemble $]y-\delta, y+\delta[$ qui est de mesure non nulle.

Contradiction avec le résultat de a)