Corrigé Partiel 2 2023-2024

Exo 1.

(1) On a $V = U = \mathbb{C} \setminus \{0, -i\}$

On note $f_1(z) = z^3 + 1 - \dfrac{4}{z(z+i)}$

$$f_1'(z) = 3z^2 + \frac{4}{z^2(z+i)^2}(z^2+zi)' = 3z^2 + \frac{4(2z+i)}{z^2(z+i)^2}$$

(2) On note $f_2(z) = Re(z)$

$$\frac{f_2(z+h) - f_2(z)}{h} = \frac{Re(z+h) - Re(z)}{h} = \frac{\cancel{Re(z)} + Re(h) - \cancel{Re(z)}}{h} = \frac{Re(h)}{h}$$

On prend $h = h_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\qquad \frac{Re(h_n)}{h_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \longrightarrow 1$

On prend $h = k_n = \frac{i}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\qquad \frac{Re(k_n)}{k_n} = \frac{0}{\frac{1}{n}} = 0 \longrightarrow 0$

Donc $\nexists \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f_2(z+h) - f_2(z)}{h}$ $\qquad V = \emptyset$.

Donc f_2 n'est derivable nulle part

(3) On note $f_3(z) = z\, Im(z)$

$$\frac{f_3(z+h) - f_3(z)}{h} = \frac{(z+h)\left(Im(z) + Im(h)\right) - z\, Im(z)}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\cancel{z\, Im(z)} + h\, Im(z) + z\, Im(h) + h\, Im(h) - \cancel{z\, Im(z)}\right)$$

$$= Im(z) + Im(h) + z\frac{Im(h)}{h}.$$

- $\lim\limits_{h\to 0} Im(z) = Im(z)$

  $\lim\limits_{h\to 0} Im(h) = 0$ $\qquad$ (car $|Im(h)| \leq |h| \to 0$)

  $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{Im(h)}{h}$ n'existe pas (on peut proceder comme en (2) avec les même h_n et k_n)

Si $z \neq 0$ alors $\lim\limits_{h\to 0} z\dfrac{Im(h)}{h}$ n'existe pas

donc f_3 n'est pas derivable en z

Si $z = 0$ alors $\lim\limits_{h\to 0} z\dfrac{Im(h)}{z} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$ et

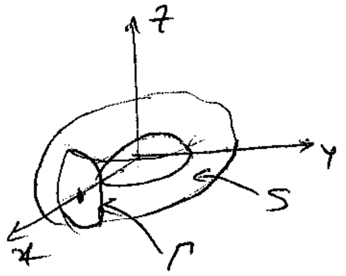
donc f_3 est dérivable en 0

$f_3'(0) = 0$

Donc $V = \{0\}$: $f_3'(0) = 0$

Exercice 2.

a) Γ est le cercle dans le plan $y=0$ du centre $(2,0,0)$ et rayon 1



b) $$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -(2+\cos t)\sin\theta \\ (2+\cos t)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\sin t \cos\theta \\ -\sin t \sin\theta \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Alors $$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} (2+\cos t)\cos t\cos\theta \\ (2+\cos t)\cos t \sin\theta \\ (2+\cos t)\sin \cancel{t} \sin^2\theta + (2+\cos t)\sin t \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

donc
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} (2+\cos t)\cos t\cos\theta \\ (2+\cos t)\cos t\sin\theta \\ (2+\cos \theta)\sin \cancel{t} \end{pmatrix} = (2+\cos t)\begin{pmatrix} \cos t\cos\theta \\ \cos t\sin\theta \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Alors
$$\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\| = |2+\cos t| \left\|\begin{pmatrix} \cos t\cos\theta \\ \cos t\sin\theta \\ \sin t \end{pmatrix}\right\| = \cancel{|2+\cos t|}\,\cancel{\sqrt{\cos^2 t\cos^2\theta}} = |2+\cos t|$$

$$= |2+\cos t| \underbrace{\sqrt{\underbrace{\cos^2 t\cos^2\theta + \cos^2 t \sin^2\theta}_{=\cos^2 t} + \sin^2 t}}_{=1}$$

Mais $2+\cos t > 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi)$ (car $\cos t \geq -1$)
donc $|2+\cos t| = 2+\cos t$.
Donc $\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\| = 2+\cos t$

c) Comme $\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\| > 0$ alors tous les points sont reguliers

$$\nu = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|} = \frac{1}{(2+\cos t)}(2+\cos t)\begin{pmatrix} \cos t\cos\theta \\ \cos t\sin\theta \\ \sin t \end{pmatrix}$$

donc $$\nu = \nu(\theta, t) = \begin{pmatrix} \cos t\cos\theta \\ \cos t\sin\theta \\ \sin t \end{pmatrix}$$

d) $\text{Aire}\,\varphi = \int_\varphi 1\,d\sigma = \int_D \|p\wedge q\|\,d\theta\,dt =$

$= \int_D (2+\cos t)\,d\theta\,dt = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(2+\cos t)\,d\theta\,dt =$

$= 2\pi\int_0^{2\pi}(2+\cos t)\,dt = 2\pi\Big(2.\,2\pi + \underbrace{\left[\sin t\right]_0^{2\pi}}_{=0}\Big) = 8\pi^2$

e) $\int_\varphi V(x)\,d\sigma = \int_D V(\varphi(\theta,t))\,\|p\wedge q\|\,d\theta\,d\theta =$

$= \int_D \left[\varphi_1^2(\theta,t)+\varphi_2^2(\theta,t)+\varphi_3^2(\theta,t)\right](2+\cos t)\,d\theta\,dt =$

$= \int_D\Big[\underbrace{(2+\cos t)^2\cos^2\theta + (2+\cos t)^2\sin^2\theta}_{=(2+\cos t)^2} + \sin^2 t\Big](2+\cos t)\,d\theta\,dt$

$= \int_D\left[(2+\cos t)^2+\sin^2 t\right](2+\cos t)\,d\theta\,dt$

Mais $(2+\cos t)^2+\sin^2 t = 4+4\cos t + \underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{=1} = 5+4\cos t$

Alors

$\int_\varphi V(x)\,d\sigma = \int_D (5+4\cos t)(2+\cos t)\,dt = \int_D (10+13\cos t+4\cos^2 t)\,d\theta\,dt$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(10+13\cos t+4\cos^2 t)\,d\theta\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi}(10+13\cos t+4\cos^2 t)\,dt$

$= 2\pi\Big(2\pi\cdot 10 + 13\int_0^{2\pi}\cos t\,dt + 4\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt\Big)$

$\int_0^{2\pi}\cos t\,dt = \left[\sin t\right]_0^{2\pi} = 0$

$\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos(2t))\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{dt}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2t)\,dt$

$= 2\pi\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(+\frac{1}{2}\sin(2t)\right)_0^{2\pi}}_{=0} = \pi.$

Alors

$\int_\varphi V(x)\,d\sigma = 2\pi(20\pi+4\pi) = 48\pi^2$

Exercice 3.

a) $\phi'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \quad \forall t \in [a,b]$, (car $\gamma'(t) \neq 0$)

~~ϕ~~ l'application $t \to$ ~~ϕ~~ $\gamma'(t)$ est continue

~~ϕ~~ Comme l'application $x^{\in \mathbb{R}^n} \to \|x\|$ est continue

Alors ϕ' est continue. Donc $\phi \in C^1$.

b) Comme $\phi' > 0 \Rightarrow \phi$ injective (strictement croissante)

$\phi(a) = \int_a^a \|\gamma'(\tau)\| d\tau = 0$

$\phi(b) = \int_a^b \|\gamma'(\tau)\| d\tau = L$

Alors ϕ est bijective de $[a,b]$ en $[0,L]$

~~Cor~~ c) Comme ϕ est de classe C^1 et $\phi' > 0$ alors

ϕ^{-1} est de classe C^1 et $(\phi^{-1})' > 0$

$(\phi^{-1})'(s) = \dfrac{1}{\phi'(\phi^{-1}(s))} > 0$

ϕ^{-1} bijective de $[0,L]$ en $[a,b]$

Alors θ est de classe C^1 par composition

~~$\gamma \circ \phi^{-1} = \theta$~~

des fonctions de classe C^1

En plus $\gamma \circ \phi^{-1} = \theta$

Alors γ et θ sont equivalentes

d) $\theta'(s) = \gamma'(\phi^{-1}(s)) \cdot (\phi^{-1})'(s) = \dfrac{1}{\phi'(\phi^{-1}(s))} \gamma'(\phi^{-1}(s))$

Alors

$\theta'(s) = \dfrac{1}{\phi'(t)} \gamma'(t)$

Alors $\theta'(s)$ est colinéaire avec $\gamma'(t)$ car $\dfrac{1}{\phi'(t)}$ est un scalaire

Mais $\phi'(t) = \|\gamma'(t)\|$, donc

$\theta'(s) = \dfrac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \gamma'(t)$

Alors $\|\theta'(s)\| = \dfrac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \|\gamma'(t)\| = 1$