Partiel 3 1.

Corrigé ~~Examen~~ MMY en MAM3 ~~2012-2013~~ 2023-2024

Exo 1 On pose $a_m = 1$ (toutes les fonctions sont prolongées par 0 si $t<0$)

a) On applique $\mathcal{L}$ à

$$\mathcal{L}(a_k y^{(k)}) = a_k \cdot s^k \mathcal{L}(y) - \underbrace{y^{(k-1)}(0+)}_{=0} - s\underbrace{y^{(k-2)}(0+)}_{=0} \cdots - s^{k-1}\underbrace{y(0+)}_{=0}$$

donc

$$\mathcal{L}(a_k y^{(k)}) = a_k s^k \mathcal{L}(y) \qquad \forall k = 0, 1 \ldots m$$

Alors $\mathcal{L}(y)(a_0 + a_1 s + \cdots + a_m s^m) = \mathcal{L}(f)$ ce qui donne ~~…~~ l'égalité demandée.

b1)
$$\frac{1}{P(s)} = \frac{1}{\cancel{a_m}(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)} =$$

$$= \frac{b_1}{s-z_1} + \frac{b_2}{s-z_2} + \cdots + \frac{b_m}{s-z_m}$$ et

Pour $k \in \{1 \ldots m\}$ fixé on multiplie par $s - z_k$ ~~et~~ $\lim_{s \to z_k}$. Ceci donne ~~$b_k = \frac{1}{a_m(z_k - z_1)\cdots(z_k - z)}$~~

$$b_k = \frac{1}{\cancel{a_m}(z_k - z_1)\cdots(z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1})\cdots(z_k - z_m)}$$

~~b2)~~ De a) on déduit

$$(*) \quad G(s) = \frac{1}{P(s)} \cdot F(s) = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{s - z_k}\right) \cdot F(s)$$

Il faut que cette égalité soit vraie dans un demi-plan complexe (donc $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ t.q $(*)$ soit vraie $\forall s \in \mathbb{C}$ avec $Re(s) > \alpha$)

Il suffit de prendre $Re(s) > \xi_a(y)$, $Re(s) > \xi_a(f)$ et $Re(s) > \max\{Re(z_1) \ldots Re(z_m)\}$

Il ~~faut~~ est clair qu'on a

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{s - z_k} = \mathcal{L}(h)(s) \quad : \quad h(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k e^{z_k t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Alors $(*)$ s'écrit

$$\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(h)(s) \cdot \mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(h * f)(s)$$

Ceci nous donne en inversant (appliquer $\mathcal{L}^{-1}$:) (voir y, h, f comme des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et causales)

$$y = h * f$$

c) On utilise a), b) avec $n=2$, $a_0=3$; $a_1=-3$

$f(t)=e^{-t}$.

Alors le polynôme P est

$P(s)=s^2-\cancel{4}s+3 = (s-1)(s-3)$ $\quad (z_1=1, z_2=3)$

$\frac{1}{P(s)} = \frac{b_1}{s-1} + \frac{b_2}{s-3}$ avec $b_1 = \frac{1}{z_1-z_2} = -\frac{1}{2}$

$b_2 = \frac{1}{z_2-z_1} = \frac{1}{2}$

$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right)(t)$

$h(t)=\left(-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{3t}\right)H(t)$

Alors $y = h * \left(e^{-t}H(t)\right)$

Comme h et $e^{-t}H(t)$ ~~sont~~ causales on a

$y(t)=0$ si $t<0$

$y(t)=\int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau$, donc pour $t>0$ (le cas qui nous intéresse) : Donc

$y(t)= \frac{1}{2}\int_0^t \left(e^{3(t-\tau)}-e^{t-\tau}\right)e^{-\tau}d\tau$

$=\frac{1}{2}e^{3t}\int_0^t e^{-4\tau}d\tau - \frac{1}{2}e^{t}\int_0^t e^{-2\tau}d\tau = \frac{1}{2}e^{3t}\frac{1}{4}(1-e^{-4t})$

$\frac{1}{4}e^{t}(e^{-2t}-1) = \frac{1}{8}e^{3t}-\frac{1}{8}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{t}$

$y(t)=\frac{1}{8}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-t}$

On voit facilement $y(t)\to\infty$ si $t\to+\infty$

<u>Exercice 2</u>

A chaque fois on note par T l'application de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ donnée

a) On pose $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $u(x)=2x\sin x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

u est continue donc $u\in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$

T n'est autre que T_u distrib régulière associée à u.

donc T est une distribution

b) Ici T n'est autre que $\varphi\delta + \delta_1'$
donc une distribution

c) On pose $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\quad u(x) = x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ici $T = 2\delta_1 + T_u$
combinaison linéaire des distributions donc distribution

~~d) Ici T est bien définie~~
~~car $x^2\varphi^2(x)$ est continue et nulle en dehors~~
~~d'un compact $K \subset \mathbb{R}$.~~
~~Montrons que T n'est pas linéaire~~
~~On pose $\varphi(x) = \theta_1(x)$~~ $\quad \theta_1(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

~~(vu en cours)~~

~~$\langle T, 2\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} x^2 (2\theta_1(x))^2 dx = 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 \theta_1^2(x)\, dx$~~

~~$2\langle T, \varphi\rangle = 2\int_{\mathbb{R}} x^2 \theta_1^2(x)\, dx$~~

~~Mais La fonction $x \longrightarrow x^2\theta_1^2(x)$ est > 0~~
~~sur $]-1, 1[- \{0\}$ qui est de mesure > 0.~~
~~et 0 ailleurs.~~

~~Donc $\int_{\mathbb{R}} x^2 \theta_1^2(x)\, dx > 0$.~~

~~Alors $\langle T, 2\varphi\rangle \neq 2\langle T, \varphi\rangle$ donc $T \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$~~
~~donc T n'est pas linéaire.~~ T n'est pas bien définie

d) On va montrer que T
Prendre $\varphi(x) = \theta_1(x-1)$

On va montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{(x-1)^2} \theta_1(x-3) \right| dx = +\infty$$

Comme $\varphi(3) = \theta(0) = \frac{1}{e} > 0$. $\quad$ Alors par continuité de φ

$\exists \delta > 0$ tel que $\quad \forall x \in]3-\delta, 3+\delta[$

$\varphi(x) > \frac{1}{2e}$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{(x-3)^2} \theta_r(x-3) \right| dx \geq \int_{3-\delta}^{3+\delta} \frac{1}{(x-3)^2} \theta_r(x-3)\, dx$$

$$\geq \frac{1}{2e} \underbrace{\int_{3-\delta}^{3+\delta} \frac{1}{(x-3)^2}\, dx}_{=+\infty} = \frac{1}{2e} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{dy}{y^2} = +\infty$$

(vu en TD)

changement de variable $y = x-3$

Exercice 3

a) On sait que $a \in \mathcal{L}_a$ (car $a = -H/1$ et $H \in \mathcal{L}_a$) alors

Par un résultat du cours (car $f \in \mathcal{L}_a$)

$a * f \in \mathcal{L}_a$

b) Prendre $\alpha = \max \{ \xi_a(a), \xi_a(f) \}$. Alors

par un résultat vu en cours $\forall s \in D_\alpha$

$\mathcal{L}(u)_{(s)} = \mathcal{L}(a * f)_{(s)} = \mathcal{L}(a)_{(s)} \cdot \mathcal{L}(f)(s)$

Comme $a = -H/1$ alors $\mathcal{L}(H)(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$

$\mathcal{L}(a)(s) = -\frac{d}{ds}$

Donc $\mathcal{L}(u)(s) = \frac{1}{s^2} \mathcal{L}(f)(s)$ ce qui donne $\forall s \in D_\alpha$.

$s^2 \mathcal{L}(u)(s) = \mathcal{L}(f)(s)$.

c) Comme $u \in \mathcal{L}_a$ alors $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

donc on peut définir $T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

d) Par définition

$\langle (T_u)'', \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi'' \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi''(x)\, dx$

$= \int_0^\infty u(x) \varphi''(x)\, dx$ car $u = 0$ sur $]-\infty, 0[$.

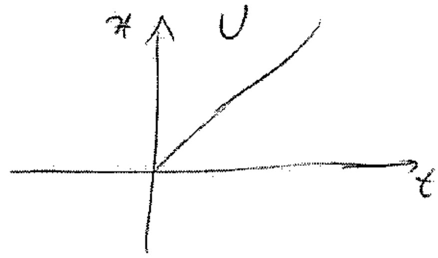
On a $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x a(x-t) f(t)\, dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$

donc

$$\langle (T_u)'', \varphi \rangle = \int_0^\infty \int_0^x (x-t) f(t)\, dt \; \varphi''(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty \int_0^x (x-t) f(t)\, \varphi''(x)\, dt\, dx$$

Fubini
$$= \int_U (x-t) f(t)\, \varphi''(x)\, dt\, dx$$



avec

$$U = \{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 ,\ 0 \leq t < x \}$$

En utilisant encore une fois le Théorème de Fubini on a

$$\langle (T_u)'', \varphi \rangle = \int_0^\infty \left[\int_t^\infty (x-t) f(t)\, \varphi''(x)\, dx \right] dt$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_t^\infty (x-t)\, \varphi''(x)\, dx \right] f(t)\, dt.$$

c) On utilise l'intégration par parties

$$\int_t^\infty (x-t) \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x)\, dx = \underbrace{\left[(x-t) \frac{d\varphi}{dx} \right]_{x=t}^{x=+\infty}}_{=0} -$$

$$- \int_t^\infty \frac{d}{dx}(x-t)\, \frac{d\varphi}{dx}$$

$$= - \int_t^\infty \frac{d\varphi}{dx} = \varphi(t).$$

Alors

$$\langle (T_u)'', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, f(t)\, dt = \langle T_f, \varphi \rangle$$

ceci pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ donc

$$(T_u)'' = T_f.$$